第一章

向量和純量

1.1 向量

向量(vector)就是一種同時具有方向和大小的量，如位移、速度、力及加速度等都是向量。

用圖形來表示，向量可用一個箭頭 OP（圖1）來代表它的方向，而它的大小則以此箭的長度來表示。箭的尾端 O 點稱爲此向量的**原點**(origin)或**始點**(initial point)，而箭頭 P 則稱爲此向量的**終點**(terminal point 或 terminus)。

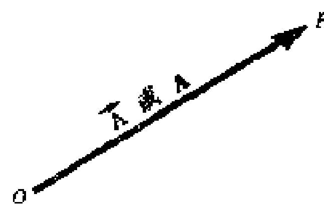


圖1

在分析中，向量可用一個字母上面冠以箭頭表示，如圖1中的 $\vec{A}$ 所示，而它的大小則用 $|\vec{A}|$ 或 A 表示。在印刷體中，常用粗體字 **A** 來代表向量 $\vec{A}$，而用 $|\mathbf{A}|$ 或 A 來代表向量的大小。在本書中我們將採用粗體字來代表向量。向量 OP 也可以表示成 $\overrightarrow{OP}$ 或 **OP**，此時我們用 $\overline{OP}$，$|\overrightarrow{OP}|$ 或 $|\mathbf{OP}|$ 來代表它的大小。

1.2 純量

純量(scalar)就是一種有大小但沒有方向的量，例如，質量、長度、時間、溫度及實數等。純量可用一般的字母來代表，而純量的運算與初等代數的運算法則相同。

1.3 向量代數

將數或純量之代數學中的四則運算，予以適當的定義，就可以擴充到**向量代數**((vector algebra)。下面就是一些基本的定義。

1. 兩個向量 **A** 和 **B** 相等(equal)的條件爲：它們的大小和方向相同，而與它們始點的位置無關。因此在圖2中，**A**＝**B**。
2. 若一個向量與 **A** 的方向相反，且與 **A** 的大小相等，則此向量記作－**A**（圖3）。
3. 向量 **A** 與 **B** 的**和**(sum)或**合量**(resultant)爲一向量 **C**，此向量係將 **B** 的始點與 **A** 的終點相重合，再將 **A** 的始點連至 **B** 的終點而形成（圖4）。此和記作 **A**＋

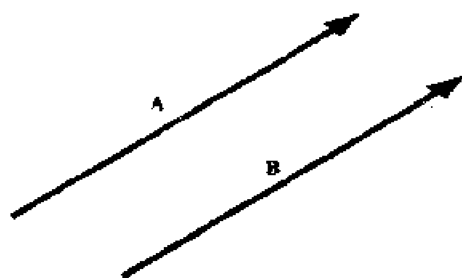


圖2

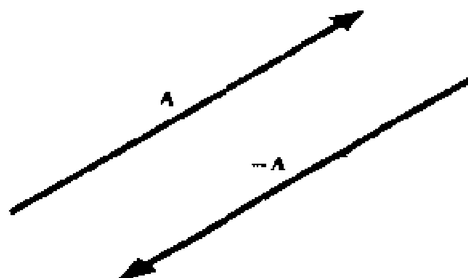


圖3

B，即 C = A + B 。

此處對向量和的定義與向量加法中的平行四邊形定律(parallelogram law)等價。(參閱 1.3 題)

由此定義可立即推廣到多個向量的和。(參閱1.4題)

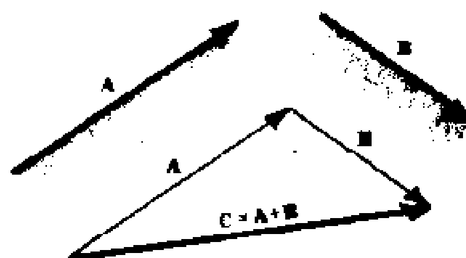


圖4

4. 向量 A 與 B 的差(difference)，記作 A − B，就是一向量 C，將其加上向量 B 就可得出向量 A 。A − B 也可以定義成和 A + (− B) 。

若 A = B，則 A − B 定義爲零向量(null 或 zero vector)，而用 0 或0 來代表。它的大小爲 0，沒有特定的方向。一個非零向量稱爲真向量(proper vector)。除非特別說明，本書所有的向量都指的是眞向量。

5. 一個向量 A 與一純量 m 的乘積(product)爲一向量 mA，它的大小是 A 之大小的 $|m|$ 倍，而方向則與 A 的方向相同或相反，視 m 的正負而定。若 $m = 0$，則 mA 爲零向量。

1·4 向量代數定律

若 A，B，C 均爲向量，而 m，n 爲純量，則

1. A + B = B + A	加法交換律
2. A + (B+C) = (A+B) + C	加法結合律
3. mA = Am	乘法交換律
4. m(nA) = (mn)A	乘法結合律
5. (m+n)A = mA + nA	分配律
6. m(A+B) = mA + mB	分配律

注意在上面的定律中，只有提到向量與純量的乘積。在第 2 章中我們將定義向量與向量的乘積。

由上面的定律，我們可以將向量方程式當作一般的代數方程式來處理。例如，若 $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$，則由移項可得 $\mathbf{A}=\mathbf{C}-\mathbf{B}$。

1-5 單位向量

所謂單位向量(unit vector)就是具有單位大小的向量，如果 $\mathbf{A}$ 是一個大小 $A \neq 0$ 的向量，則 $\mathbf{A}/A$ 爲一與 $\mathbf{A}$ 具有相同方向的單位向量。

任何一個向量 $\mathbf{A}$ 都可以用與它同方向的單位向量 $\mathbf{a}$ 乘上它的大小 A 來表示，即 $\mathbf{A}=A\mathbf{a}$。

1-6 正交單位向量 i，j，k

與三維直角座標系中正 x 軸、正 y 軸、正 z 軸同方向的一組單位向量非常重要，分別記作 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$（圖5）。

除非特別說明，我們都使用*右旋直角座標系*(right-handed rectangular coordinate systems)。這個名稱的由來是因爲如果我們由 Ox 向 Oy 按右旋螺絲的方向轉 90° 就會得到正 z 軸的方向，如圖5所示。

一般來說，共始點但不共面的三個向量 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$，如果由 $\mathbf{A}$ 向 $\mathbf{B}$ 以右旋的方式，旋轉不到 180° 就能到達 $\mathbf{C}$ 的方向，則稱此三向量形成一個*右旋系統*(right-handed system 或 dextral system)，如圖6所示。

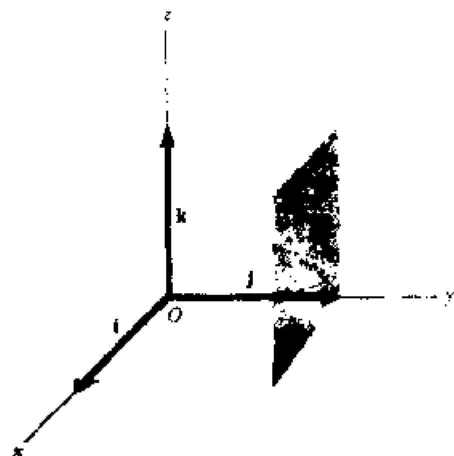


圖 5

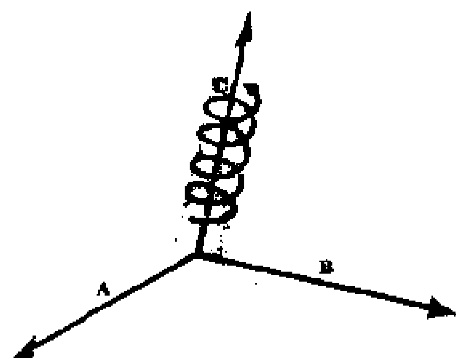


圖 6

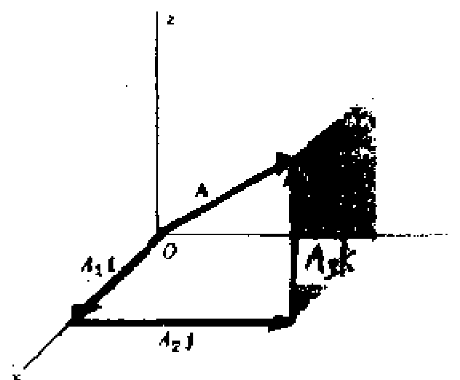


圖 7

1·7 向量的分量

在三維空間中的任一向量A都可以將其用始點在原點O的直角座標系中的一個向量來表示（圖7）。若(A_1, A_2, A_3)爲將A的始點置於O時其終點的直角座標，則向量$A_1\mathbf{i}$，$A_2\mathbf{j}$，$A_3\mathbf{k}$稱爲A的**直角分向量**（rectangular component vectors）或簡稱爲A分別在x，y及z方向的**分向量**（component vectors）。A_1，A_2，A_3稱爲A的**直角分量**（rectangular component）或A在x，y及z方向的**分量**（component）。

$A_1\mathbf{i}$，$A_2\mathbf{j}$及$A_3\mathbf{k}$的和或合量即爲A，所以我們可以寫作

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$$

A的大小爲

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

特別地，由O至點(x, y, z)的**位置向量**（position vector）或**向徑**（radius vector）可以寫作

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

其大小爲

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

1·8 純量場

如果在空間中某一區域R中的每一點(x, y, z)都會對應到一個數或純量$\phi(x, y, z)$，則ϕ稱爲一個**位置純量函數**（scalar function of position）或**純量點函數**（scalar point function），並且我們說在R中定義了一個**純量場**（scalar field）ϕ。

例題1.1

(a) 在某一定時間，地球表面或地球內部任一點的溫度定義了一個純量場。

(b) $\phi(x, y, z) = x^3 y - z^2$ 定義了一個純量場。

一個與時間無關的純量場，稱爲一**穩定**（stationary）或**穩態**（steady-state）純量場。

1·9 向量場

如果在空間中某一區域R中的每一點(x, y, z)都會對應到一個向量$\mathbf{V}(x, y, z)$，則稱V爲一個**位置向量函數**（vector function of position）或**向量點函數**（vector point function），並且我們說在R中定義了一個**向量場**（vector field）V。

例題1.2

(a) 在某一定時間，在一流動流體中任一點 (x, y, z) 的速度定義了一個向量場。

(b) $\mathbf{V}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} - 2yz^3\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$ 定義了一個向量場。

一個與時間無關的向量場，稱爲穩定或穩態向量場。

習題與解答

1.1 辨別下列何者爲純量，何者爲向量。

(a) 重量　(c) 比熱　(e) 密度　(g) 體積　(i) 速率

(b) 卡路里　(d) 動量　(f) 能量　(h) 距離　(j) 磁場強度

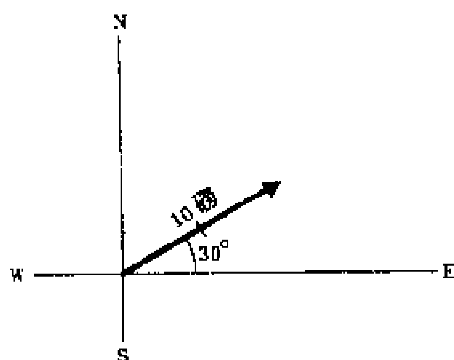
答 (a) 向量　(c) 純量　(e) 純量　(g) 純量　(i) 純量

(b) 純量　(d) 向量　(f) 純量　(h) 純量　(j) 向量

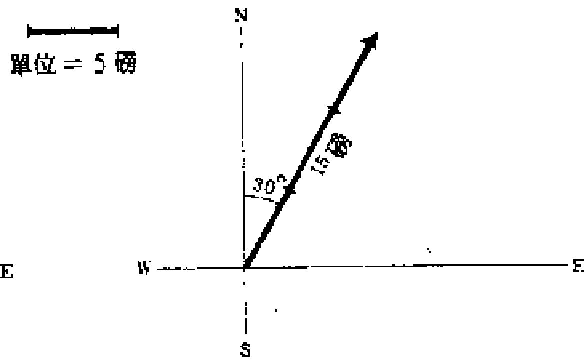
1.2 用圖形表示(a)一個向東偏北 30° 方向的 10 磅力。

(b)一個向北偏東 30° 方向的 15 磅力。

答



圖(a)



圖(b)

選擇所示的單位，所要求的向量如圖所示。

1.3 一汽車向北走了三哩，再向東北走了 5 哩。用圖形來表示這些位移，並用(a)圖形(b)分析法來求總位移。

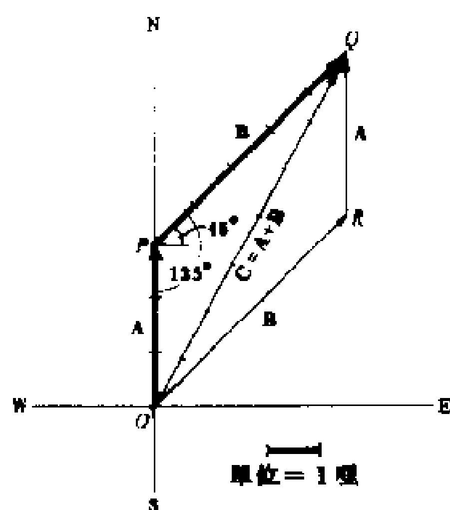
答　向量**OP**或**A**代表向北 3 哩的位移。

向量**PQ**或**B**代表向東北 5 哩的位移。

向量**OQ**或**C**代表總位移，或用**A**與**B**的和來代表，即 $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$。這就是向量加法的三角形定律。

合量**OQ**也可以利用以 $\mathbf{OP} = \mathbf{A}$ 及**OR**（等於向量**PQ**或**B**）爲邊所建立的平行四邊形 $OPQR$ 得到，這就是向量加法的平行四邊形定律。

(a) 圖形法　在向量**OQ**上用 1 哩的單位測量，得出其大小約爲 7.4 哩，再用量角器量出角 $EOQ = 61.5°$。則向量**OQ**的大小爲 7.4 哩，方向爲東偏



北61.5°。

(b) 分析法 由三角形 OPQ，將A，B，C的大小分別用A，B，C 來代表，利用餘弦定律可得

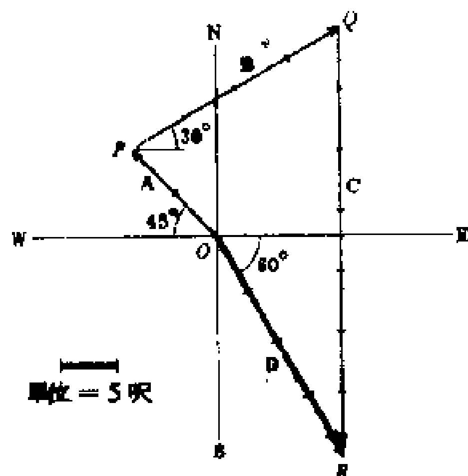
$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\angle OPQ = 3^2 + 5^2 - 2(3)(5)\cos 135^\circ = 34 + 15\sqrt{2} = 55.21$$

因此C＝7.43（近似值）。

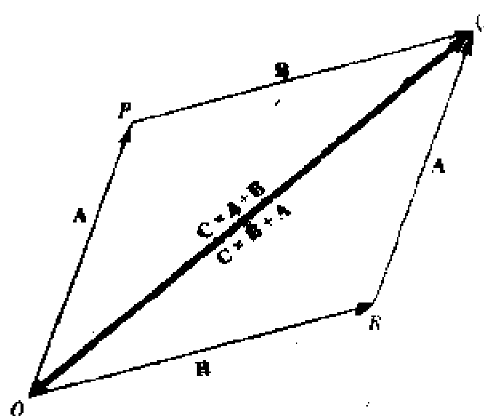
再由正弦定律 $\frac{A}{\sin\angle OQP} = \frac{C}{\sin\angle OPQ}$，得出

$$\sin\angle OQP = \frac{A\sin\angle OPQ}{C} = \frac{3(0.707)}{7.43} = 0.2855 \quad 且 \quad \angle OQP = 16^\circ 35'$$

因此向量OQ的大小為7.43哩，方向為東偏北（45°＋16°35′）＝61°35′。



圖(a)



圖(b)

1.4　求下列位移的和：

A，10呎東北；B，20呎東偏北30°；C，35呎正南，見前面圖(a)。

答　將B的始點放在A的終點上。

將C的始點放在B的終點上。

總位移D即爲由A的始點指向C的終點，亦即D＝A＋B＋C。

用圖示法測量得D的大小爲4.1單位＝20.5呎，方向爲東偏南60°。

三個以上向量相加的分析法，參閱1.26題。

1.5　證明向量的加法可交換，即A＋B＝B＋A。見前面圖(b)。

答

$$\mathbf{OP} + \mathbf{PQ} = \mathbf{OQ} \quad 或 \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}.$$

且

$$\mathbf{OR} + \mathbf{RQ} = \mathbf{OQ} \quad 或 \quad \mathbf{B} + \mathbf{A} = \mathbf{C}.$$

因此　A＋B＝B＋A。

1.6　證明向量的加法可結合，即A＋(B＋C)＝(A＋B)＋C。

答

$$\mathbf{OP} + \mathbf{PQ} = \mathbf{OQ} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}),$$

且

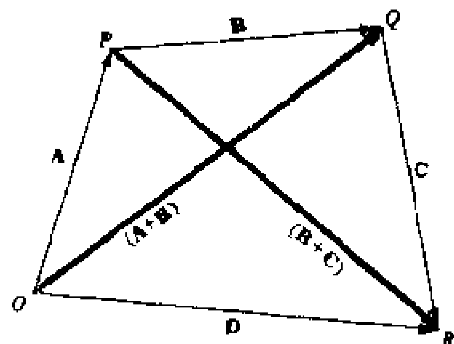
$$\mathbf{PQ} + \mathbf{QR} = \mathbf{PR} = (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$

$$\mathbf{OP} + \mathbf{PR} = \mathbf{OR} = \mathbf{D}, \text{ i.e. } \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{D}.$$

$$\mathbf{OQ} + \mathbf{QR} = \mathbf{OR} = \mathbf{D}, \text{ i.e. } (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{D}.$$

則　A＋(B＋C)＝(A＋B)＋C。

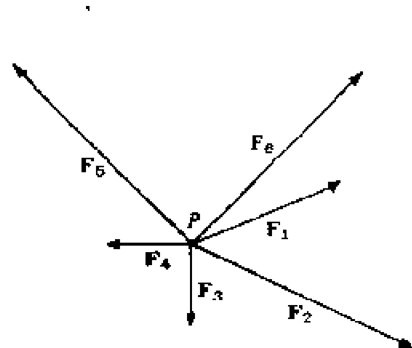
將1.5題與1.6題的結果推廣，可知任意多個向量相加，順序是不重要的。

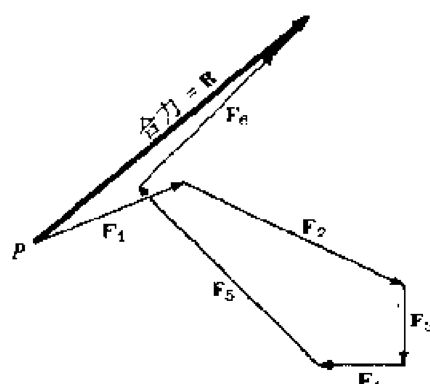


1.7　6個作用在P上的力$\mathbf{F}_1$，$\mathbf{F}_2$，…，$\mathbf{F}_6$如圖所示，則要使P保持不動所需之力爲何？

答　由於向量加法與其順序無關，我們可以由任一向量開始，如$\mathbf{F}_1$。將$\mathbf{F}_1$加上$\mathbf{F}_2$，再加上$\mathbf{F}_3$，…。由$\mathbf{F}_1$的始點畫向$\mathbf{F}_6$終點的向量即爲合力R，即$\mathbf{R}=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\mathbf{F}_3+\mathbf{F}_4+\mathbf{F}_5+\mathbf{F}_6$。

要使P保持不動的力就是－R，它是一個大小與R相等但方向相反的向量，有時候我們稱此力爲平衡力（equilibrant）。





1.8　給定向量 **A**，**B**，**C**（圖 1 (a)），試建立 (a) $\mathbf{A}-\mathbf{B}+2\mathbf{C}$　(b) $3\mathbf{C}-\frac{1}{2}(2\mathbf{A}-\mathbf{B})$。

解　(a)

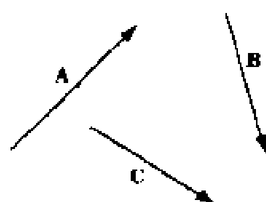


圖 1 (a)

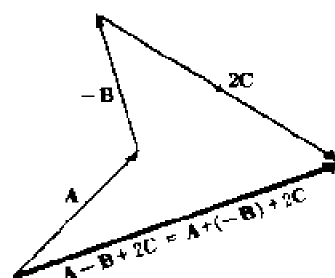


圖 2 (a)

(b)

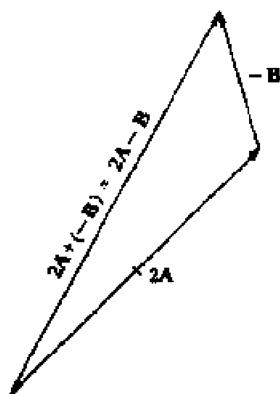


圖 1 (b)

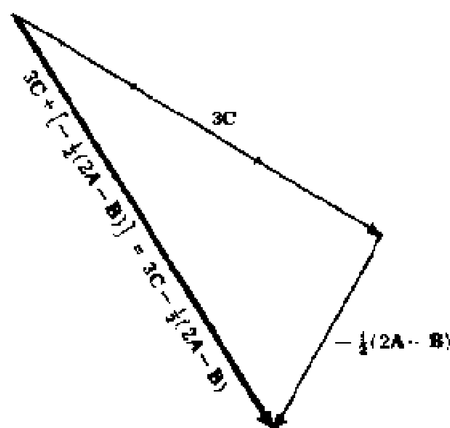


圖 2 (b)

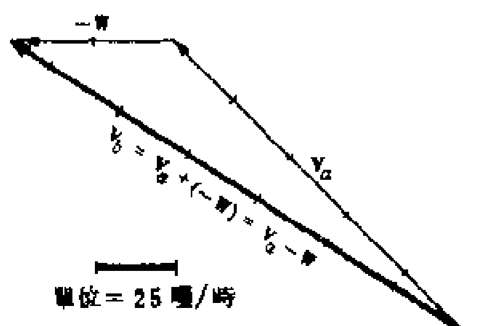
1.9　一飛機由於受相對於地面向西 50 哩/時 的風影響，以相對於地面向西北方向 125 哩/時 的速度飛行。如果沒有風的話，飛機的飛行方向及速度爲何？

解　令

$\mathbf{W}$ = 風速

$\mathbf{V}_a$ = 受風時的飛機速度

$\mathbf{V}_b$ = 不受風時的飛機速度



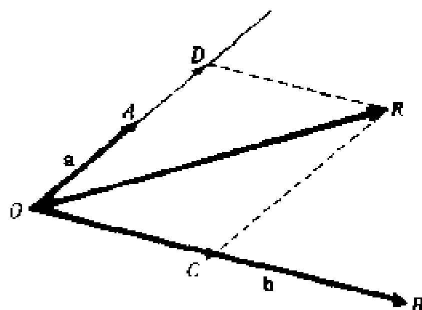
則

$$V_a = V_b + W \quad 或 \quad V_b = V_a - W = V_a + (-W)$$

V_b的大小爲6.5單位＝163哩/時，方向爲西偏北33°。

1.10　若 **a**、**b** 爲不共線的二向量，求在由 **a**、**b** 所決定的平面上任一向量 **r** 的表示式。

圖　不共線的兩向量也就是兩個不平行的向量，因此當將此二向量的始點重合後可決定一平面。令 **r** 是在由 **a** 及 **b** 所決定之平面上任一始點與 **a**、**b** 之始點重合的向量。由 **r** 的終點 R 分別畫一條與 **a** 及 **b** 平行的線，可形成一個平行四邊形 $ODRC$。由右邊的圖形可知



$$\mathbf{OD} = x(\mathbf{OA}) = x\mathbf{a}, \quad 其中 x 爲一純量$$
$$\mathbf{OC} = y(\mathbf{OB}) = y\mathbf{b}, \quad 其中 y 爲一純量$$

由向量加法的平行四邊形定律可得

$$\mathbf{OR} = \mathbf{OD} + \mathbf{OC} \quad 或 \quad \mathbf{r} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$$

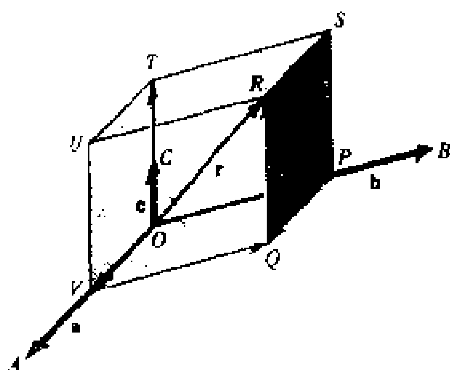
這就是我們所要求的表示式。向量 $x\mathbf{a}$ 及 $y\mathbf{b}$ 分別稱爲 **r** 在方向 **a** 和 **b** 的分向量（component vector）。純量 x 和 y 視這些向量的方位而定可正可負。由我們處理的過程可知，在給定 **a**、**b** 及 **r** 後，x 和 y 是唯一的。向量 **a** 和 **b** 稱爲此平面的基底向量（base vector）。

1.11　給定三個不共面的向量 **a**、**b**、**c**，求三維空間中任一向量 **r** 的表示式。

圖　不共面的三個向量也就是說它們不會平行於同一平面，因此，當將它們的始點重合後，它們不會落在同一平面上。

令 **r** 是在由 **a**、**b**、**c** 所決定的空間中始點與它們重合的任一向量。通過

r 的終點 R，我們分別作與 a 及 b、b 及 c、a 及 c 所張之平面相平行的平面，形成一個平行六面體 $PQRSTUV$。由下圖知



$$\mathbf{OV} = x(\mathbf{OA}) = x\mathbf{a} \quad \text{其中 } x \text{ 是一純量}$$
$$\mathbf{OP} = y(\mathbf{OB}) = y\mathbf{b} \quad \text{其中 } y \text{ 是一純量}$$
$$\mathbf{OT} = z(\mathbf{OC}) = z\mathbf{c} \quad \text{其中 } z \text{ 是一純量}$$

但是 $\mathbf{OR} = \mathbf{OV} + \mathbf{VQ} + \mathbf{QR} = \mathbf{OV} + \mathbf{OP} + \mathbf{OT}$ 因此 $\mathbf{r} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$.

由上面的過程可知，當 a、b、c 及 r 給定時，x，y，z 是唯一的。

向量 $x\mathbf{a}$，$y\mathbf{b}$ 及 $z\mathbf{c}$ 分別稱為 r 在 a、b、c 方向的分向量，而向量 a、b，c 稱為三維空間中的基底向量。

特別地，當 a、b、c 分別為相互垂直的單位向量 i、j、k 時，我們可以看出任一向量 r 均可用 i，j，k 表成唯一的表示式 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$。

同時，如果 $\mathbf{c} = \mathbf{0}$，則 r 一定會位於由 a、b 所決定的平面上，可得到 1.10 題的結果。

1.12 證明若 a、b 不共線，則 $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{0}$ 可推論出 $x = y = 0$。

解 假設 $x \neq 0$，則 $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{0}$ 可推得 $x\mathbf{a} = -y\mathbf{b}$ 或 $\mathbf{a} = -(y/x)\mathbf{b}$，因此，a 和 b 必定是共線的兩向量，這與假設不合。因此，$x = 0$；則 $y\mathbf{b} = \mathbf{0}$，得 $y = 0$。

1.13 a 和 b 為不共線的兩向量，若 $x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b} = x_2\mathbf{a} + y_2\mathbf{b}$，則 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 = y_2$。

解 $x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b} = x_2\mathbf{a} + y_2\mathbf{b}$ 可以寫成

$$x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b} - (x_2\mathbf{a} + y_2\mathbf{b}) = \mathbf{0} \quad \text{或} \quad (x_1 - x_2)\mathbf{a} + (y_1 - y_2)\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

因此，由 1.12 題可得 $x_1 - x_2 = 0$, $y_1 - y_2 = 0$ 或 $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

1.14 證明若 a、b 及 c 不共面，則由 $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{0}$ 可推論出 $x = y = z = 0$。

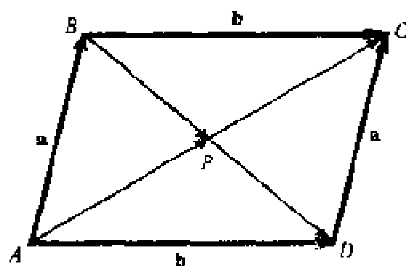
解 假設 $x \neq 0$，則由 $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{0}$ 可推得 $x\mathbf{a} = -y\mathbf{b} - z\mathbf{c}$ 或 $\mathbf{a} = -(y/x)\mathbf{b} - (z/x)\mathbf{c}$。但是 $-(y/x)\mathbf{b} - (z/x)\mathbf{c}$ 是一個位於由 b、c 所張之平面上的向量（1.10 題），也就是 a 位於 b、c 所張的平面上，這與此三向量不共面的假設不合。因此，$x = 0$。同理，在假設 $y \neq 0$ 及 $z \neq 0$ 時也會得到同樣的矛盾，因此 $x = 0$，$y = 0$，$z = 0$。

1.15 假設 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 三向量不共面，若 $x_1\mathbf{a}+y_1\mathbf{b}+z_1\mathbf{c}=x_2\mathbf{a}+y_2\mathbf{b}+z_2\mathbf{c}$，則 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$，$z_1=z_2$。

圖 此方程式可改寫成 $(x_1-x_2)\mathbf{a}+(y_1-y_2)\mathbf{b}+(z_1-z_2)\mathbf{c}=\mathbf{0}$，則由1.14題可得 $x_1-x_2=0$，$y_1-y_2=0$，$z_1-z_2=0$ 或 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$，$z_1=z_2$。

1.16 證明平行四邊形的兩對角線互相平分。

圖 令 $ABCD$ 爲一平行四邊形，其兩對角線交於 P。



由於 $\mathbf{BD}+\mathbf{a}=\mathbf{b}$，因此 $\mathbf{BD}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$。所以 $\mathbf{BP}=x(\mathbf{b}-\mathbf{a})$。

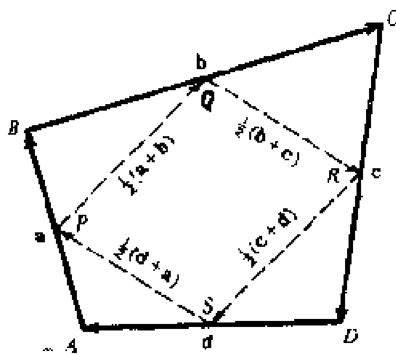
由於 $\mathbf{AC}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$，因此 $\mathbf{AP}=y(\mathbf{a}+\mathbf{b})$。

但是 $\mathbf{AB}=\mathbf{AP}+\mathbf{PB}=\mathbf{AP}-\mathbf{BP}$，即 $\mathbf{a}=y(\mathbf{a}+\mathbf{b})-x(\mathbf{b}-\mathbf{a})=(x+y)\mathbf{a}+(y-x)\mathbf{b}$。

由於 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 不共線，所以由1.13題可知，$x+y=1$ 且 $y-x=0$，亦即 $x=y=\frac{1}{2}$，因此 P 是兩對角線的中點。

1.17 證明將任意四邊形的四邊中點依序相連會形成一個平行四邊形。

圖 令 $ABCD$ 爲所給的任意四邊形，P，Q，R，S 分別爲各邊中點，如下圖所示。



則 $\mathbf{PQ}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, $\mathbf{QR}=\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$, $\mathbf{RS}=\frac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d})$, $\mathbf{SP}=\frac{1}{2}(\mathbf{d}+\mathbf{a})$.

但是 $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=\mathbf{0}$，因此

$$\mathbf{PQ}=\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=-\tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d})=\mathbf{SR} \quad \text{且} \quad \mathbf{QR}=\tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=-\tfrac{1}{2}(\mathbf{d}+\mathbf{a})=\mathbf{PS}$$

因此兩對邊相等且平行，$PQRS$ 爲一平行四邊形。

1.18 令 P_1、P_2 及 P_3 爲三個相對於原點 O 的固定點，且 $\mathbf{r}_1$，$\mathbf{r}_2$，$\mathbf{r}_3$ 分別爲由 O 至各點的位置向量。證明若相對於原點 O，向量方程式 $a_1\mathbf{r}_1+a_2\mathbf{r}_2+a_3\mathbf{r}_3=\mathbf{0}$ 成立，則此方程式相對於任一其它原點 O' 也成立的充要條件爲 $a_1+a_2+a_3=0$。

解 令 $\mathbf{r}_1'$，$\mathbf{r}_2'$ 及 $\mathbf{r}_3'$ 爲 P_1，P_2，P_3 相對於 O' 的位置向量，且令 $\mathbf{v}$ 爲 O' 相對於 O 的位置向量。我們要找出在什麼條件下，方程式 $a_1\mathbf{r}_1'+a_2\mathbf{r}_2'+a_3\mathbf{r}_3'=0$ 在新座標系下成立。

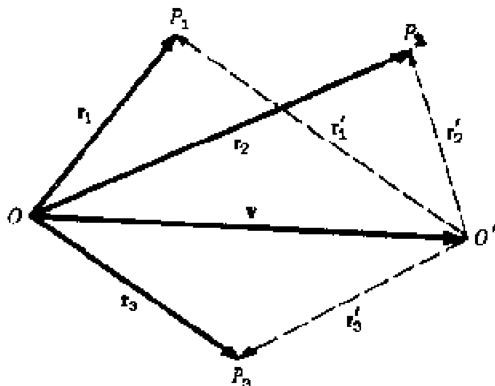
由下圖中，很明顯的可以看出 $\mathbf{r}_1=\mathbf{v}+\mathbf{r}_1'$，$\mathbf{r}_2=\mathbf{v}+\mathbf{r}_2'$，$\mathbf{r}_3=\mathbf{v}+\mathbf{r}_3'$，所以 $a_1\mathbf{r}_1+a_2\mathbf{r}_2+a_3\mathbf{r}_3=0$ 變爲

$$\begin{aligned}a_1\mathbf{r}_1+a_2\mathbf{r}_2+a_3\mathbf{r}_3 &= a_1(\mathbf{v}+\mathbf{r}_1')+a_2(\mathbf{v}+\mathbf{r}_2')+a_3(\mathbf{v}+\mathbf{r}_3')\\ &= (a_1+a_2+a_3)\mathbf{v}+a_1\mathbf{r}_1'+a_2\mathbf{r}_2'+a_3\mathbf{r}_3' = \mathbf{0}\end{aligned}$$

因此 $a_1\mathbf{r}_1'+a_2\mathbf{r}_2'+a_3\mathbf{r}_3'=0$ 要成立若且唯若

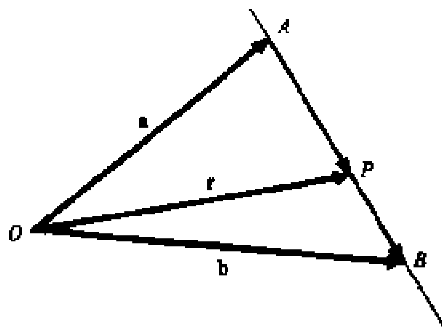
$$(a_1+a_2+a_3)\mathbf{v}=\mathbf{0}, \quad 即 \quad a_1+a_2+a_3=0.$$

這個結果我們可以將它推廣。



1.19 若 A，B 兩點對應於原點 O 的位置向量分別爲 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$，求通過 A，B 兩點的直線方程式。

解 令 P 爲通過 A，B 兩點之直線上的任一點，其位置向量爲 $\mathbf{r}$。



由上圖得知

$$\mathbf{OA}+\mathbf{AP}=\mathbf{OP} \quad 或 \quad \mathbf{a}+\mathbf{AP}=\mathbf{r}, \quad 即 \quad \mathbf{AP}=\mathbf{r}-\mathbf{a}$$

且

$$\mathbf{OA}+\mathbf{AB}=\mathbf{OB} \quad 或 \quad \mathbf{a}+\mathbf{AB}=\mathbf{b}, \quad 即 \quad \mathbf{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$$

由於**AP**與**AB**共線，所以**AP**$=t$ **AB**或 $\mathbf{r}-\mathbf{a}=t(\mathbf{b}-\mathbf{a})$。因此所要求的直線方程式為

$$\mathbf{r}=\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \quad 或 \quad \mathbf{r}=(1-t)\mathbf{a}+t\mathbf{b}$$

如果我們將方程式寫成 $(1-t)\mathbf{a}+t\mathbf{b}-\mathbf{r}=0$，則 **a**，**b**，**r** 的係數和為 $1-t+t-1=0$。因此由1.18題我們可知P一定在A，B的連線上，而與原點O所選擇無關。

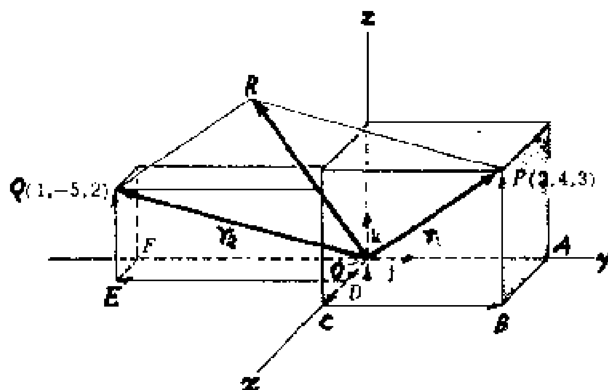
另解　由於**AP**與**PB**共線，所以存在純量m和n使得：

$$m\mathbf{AP}=n\mathbf{PB} \quad 或 \quad m(\mathbf{r}-\mathbf{a})=n(\mathbf{b}-\mathbf{r})$$

解之，得 $\mathbf{r}=\dfrac{m\mathbf{a}+n\mathbf{b}}{m+n}$，此式稱為**對稱式**（symmetric form）。

1.20　(a) 求直角座標系中點$P(2,4,3)$及$Q(1,-5,2)$的位置向量$\mathbf{r}_1$及$\mathbf{r}_2$，用單位向量 **i**，**j**，**k**表示。

(b) 用圖示法與分析法求出此二向量的合量。



答 (a)
$$\mathbf{r}_1=\mathbf{OP}=\mathbf{OC}+\mathbf{CB}+\mathbf{BP}=2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_2=\mathbf{OQ}=\mathbf{OD}+\mathbf{DE}+\mathbf{EQ}=\mathbf{i}-5\mathbf{j}+2\mathbf{k}$$

(b) 圖示法，$\mathbf{r}_1$與$\mathbf{r}_2$的合量可用平行四邊形 $OPQR$ 的對角線**OR**表示。用分析法可得$\mathbf{r}_1$與$\mathbf{r}_2$的合量為

$$\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2=(2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+3\mathbf{k})+(\mathbf{i}-5\mathbf{j}+2\mathbf{k})=3\mathbf{i}-\mathbf{j}+5\mathbf{k}$$

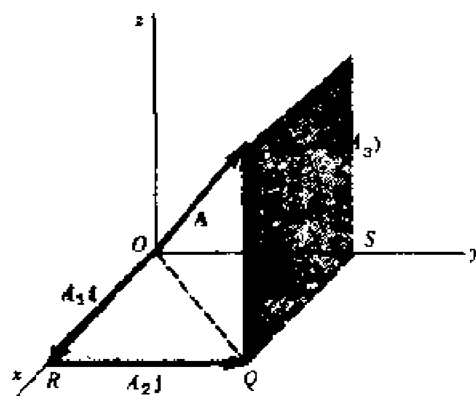
1.21　證明向量$\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$的大小為$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}$。

答　由畢氏定理，

$$(\overline{OP})^2=(\overline{OQ})^2+(\overline{QP})^2$$

其中$\overline{OP}$代表向量**OP**的大小，其他也是一樣。同理

$$(\overline{OQ})^2=(\overline{OR})^2+(\overline{RQ})^2.$$



則 $(\overline{OP})^2 = (\overline{OR})^2 + (\overline{RQ})^2 + (\overline{QP})^2$ 或

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2. \quad 即.\ A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}.$$

1.22 若 $\mathbf{r}_1 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_3 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, 求下列向量的大小 (*a*) $\mathbf{r}_3$，(*b*) $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$，(*c*) $2\mathbf{r}_1 - 3\mathbf{r}_2 - 5\mathbf{r}_3$．

圖 (*a*) $|\mathbf{r}_3| = |-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2} = 3.$

(*b*) $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = (3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + (2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

則 $|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3| = |4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 0\mathbf{k}| = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2 + (0)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

(*c*) $2\mathbf{r}_1 - 3\mathbf{r}_2 - 5\mathbf{r}_3 = 2(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) - 3(2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) - 5(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

$= 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k} - 6\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 9\mathbf{k} + 5\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 10\mathbf{k} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$

則 $|2\mathbf{r}_1 - 3\mathbf{r}_2 - 5\mathbf{r}_3| = |5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}| = \sqrt{(5)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{30}.$

1.23 若 $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_3 = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ 且 $\mathbf{r}_4 = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, 求純量 a，b，c 使得 $\mathbf{r}_4 = a\mathbf{r}_1 + b\mathbf{r}_2 + c\mathbf{r}_3$．

圖 由題意需求 $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k} = a(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) + b(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) + c(-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k})$

$= (2a + b - 2c)\mathbf{i} + (-a + 3b + c)\mathbf{j} + (a - 2b - 3c)\mathbf{k}.$

由於 **i**，**j**，**k** 不共面，所以由 1.15 題可得

$$2a + b - 2c = 3, \quad -a + 3b + c = 2, \quad a - 2b - 3c = 5.$$

解之得 $a = -2,\ b = 1,\ c = -3$ 且 $\mathbf{r}_4 = -2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - 3\mathbf{r}_3$.

向量 $\mathbf{r}_4$ 稱爲與向量 $\mathbf{r}_1$，$\mathbf{r}_2$，$\mathbf{r}_3$ 線性相依（linear dependent）；換句話說，$\mathbf{r}_1$，$\mathbf{r}_2$，$\mathbf{r}_3$ 與 $\mathbf{r}_4$ 構成一組線性相依的向量。另一方面，這四個向量中任三個（或更少）向量都是線性獨立（linear independent）。

一般來說，如果我們能找到一組不全爲 0 的純量 a，b，c，…，使得 $a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} + \cdots = 0$，則稱向量 **A**，**B**，**C**，… 爲線性相依，否則即稱此組向量爲線性獨立。

1.24　求一單位向量，其與向量 $\mathbf{r}_1=2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-5\mathbf{k}$，$\mathbf{r}_2=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ 的合量平行。

答　合量 $\mathbf{R}=\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2=(2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-5\mathbf{k})+(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})=3\mathbf{i}+6\mathbf{j}-2\mathbf{k}$.

$$R=|\mathbf{R}|=|3\mathbf{i}+6\mathbf{j}-2\mathbf{k}|=\sqrt{(3)^2+(6)^2+(-2)^2}=7.$$

則平行於 $\mathbf{R}$ 的單位向量為 $\frac{\mathbf{R}}{R}=\frac{3\mathbf{i}+6\mathbf{j}-2\mathbf{k}}{7}=\frac{3}{7}\mathbf{i}+\frac{6}{7}\mathbf{j}-\frac{2}{7}\mathbf{k}$.

檢驗：$\left|\frac{3}{7}\mathbf{i}+\frac{6}{7}\mathbf{j}-\frac{2}{7}\mathbf{k}\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{6}{7}\right)^2+\left(-\frac{2}{7}\right)^2}=1.$

1.25　若一向量的始點在 $P(x_1,y_1,z_1)$，終點在 $Q(x_2,y_2,z_2)$。試決定此向量，並求其大小。

答

P 的位置向量為 $\mathbf{r}_1=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$.

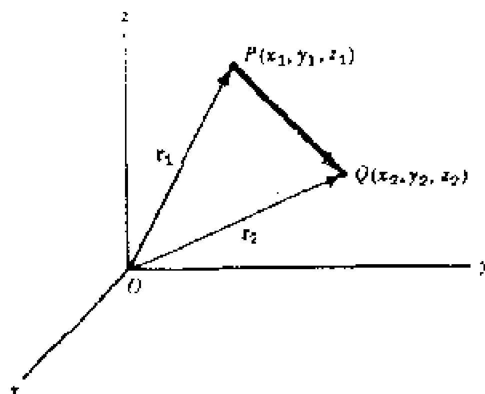
Q 的位置向量為 $\mathbf{r}_2=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$.

$\mathbf{r}_1+\mathbf{PQ}=\mathbf{r}_2$ 或

$$\mathbf{PQ}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1=(x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k})-(x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k})$$
$$=(x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}+(z_2-z_1)\mathbf{k}.$$

$\mathbf{PQ}$ 的大小 $=\overline{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

注意此大小即為 P 點與 Q 點的距離。



1.26　若有三力 $\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$，$\mathbf{B}=B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}$，$\mathbf{C}=C_1\mathbf{i}+C_2\mathbf{j}+C_3\mathbf{k}$，作用在一物體上，求此三力之合力的大小。

答　合力　$\mathbf{R}=\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}=(A_1+B_1+C_1)\mathbf{i}+(A_2+B_2+C_2)\mathbf{j}+(A_3+B_3+C_3)\mathbf{k}$.

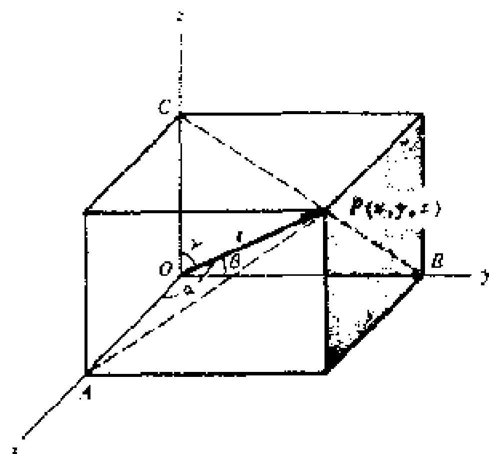
合力的大小 $=\sqrt{(A_1+B_1+C_1)^2+(A_2+B_2+C_2)^2+(A_3+B_3+C_3)^2}$.

這個結果可以很容易地推廣至更多個力的情形。

1.27　決定向量 $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 與三座標軸正方向的夾角 α、β、γ。並證明

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

答 參考下圖，三角形OAP爲一直角三角形，角A爲直角；則$\cos\alpha=\frac{x}{|\mathbf{r}|}$。同理由三角形$OBP$及$OCP$可得$\cos\beta=\frac{y}{|\mathbf{r}|}$，$\cos\gamma=\frac{z}{|\mathbf{r}|}$。同時，$|\mathbf{r}|=r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。



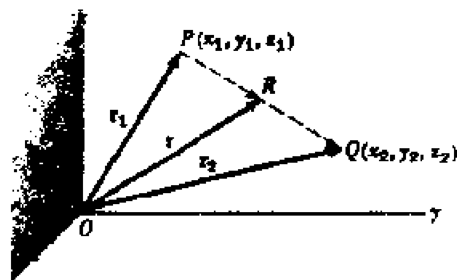
由 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$, $\cos\beta=\frac{y}{r}$, $\cos\gamma=\frac{z}{r}$ 可求出α，β，γ。並由此可求出

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}=1.$$

數$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$稱爲向量**OP**的方向餘弦（direction cosine）。

1-28 決定通過點$P(x_1,y_1,z_1)$與$Q(x_2,y_2,z_2)$的一組直線方程式。

答 令$\mathbf{r}_1$與$\mathbf{r}_2$分別爲P，Q的位置向量，而$\mathbf{r}$爲連接P、Q之直線上任一點R的位置向量。



$\mathbf{r}_1+\mathbf{PR}=\mathbf{r}$ 或 $\mathbf{PR}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$

$\mathbf{r}_1+\mathbf{PQ}=\mathbf{r}_2$ 或 $\mathbf{PQ}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$

但是由於P，Q，R共線，所以$\mathbf{PR}=t\,\mathbf{PQ}$，其中$t$爲一純量，因此$\mathbf{r}-\mathbf{r}_1=t(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)$爲所要求的直線向量方程式（與1.19題比較）。

用直角座標來表示，由於$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，所以

$$(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})-(x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k})=t[(x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k})-(x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k})]$$

$$(x-x_1)\mathbf{i}+(y-y_1)\mathbf{j}+(z-z_1)\mathbf{k}=t[(x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}+(z_2-z_1)\mathbf{k}]$$

因爲 **i**，**j**，**k** 不共面，由 1.15 題可知

$$x-x_1 = t(x_2-x_1),\quad y-y_1 = t(y_2-y_1),\quad z-z_1 = t(z_2-z_1)$$

爲此直線的參數式，t 爲參數。將 t 消去，方程式變爲

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

1.29 給定一個純量場 $\phi(x,y,z)=3x^2z-xy^3+5$，求 ϕ 在下列點之值。

(a) (0, 0, 0), (b) (1, −2, 2) (c) (−1, −2, −3).

答 (a) $\phi(0,0,0) = 3(0)^2(0)-(0)(0)^3+5 = 0-0+5 = 5$

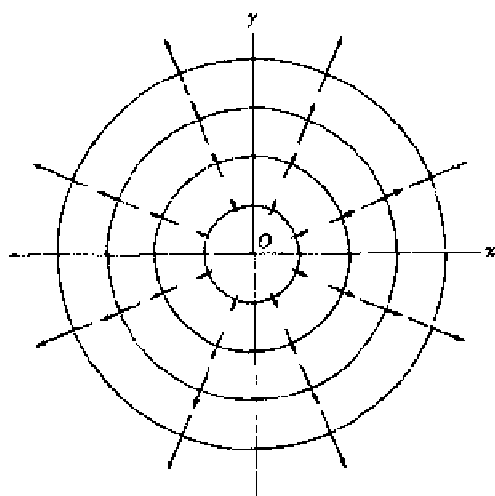
(b) $\phi(1,-2,2) = 3(1)^2(2)-(1)(-2)^3+5 = 6+8+5 = 19$

(c) $\phi(-1,-2,-3) = 3(-1)^2(-3)-(-1)(-2)^3+5 = -9-8+5 = -12$

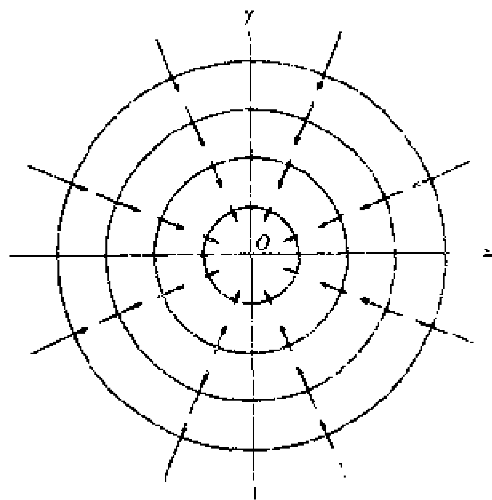
1.30 畫出下列向量場的圖形：

(a) $\mathbf{V}(x,y) = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$, (b) $\mathbf{V}(x,y) = -x\mathbf{i}-y\mathbf{j}$, (c) $\mathbf{V}(x,y,z) = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$.

答 (a) 在 xy 平面上除了（0，0）以外的任一點（x，y），都定義了一個唯一的向量 $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$，其大小爲 $\sqrt{x^2+y^2}$，方向爲由原點向外指向此點。爲了簡化畫圖過程，我們注意到在圓 $x^2+y^2=a^2$，$a>0$ 上的點所對應的向量，其大小爲 a。所以此向量場如圖(a)所示。



圖(a)



圖(b)

(b) 此向量場中每一向量均與(a)中對應的向量大小相等但方向相反，如圖(b)所示。

在圖(a)的向量場顯現一個特徵，就是看起來好像從一個源點 O 點按指定方向向外溢流，故此場稱爲源場（source field），而 O 稱爲源點（source）。

在圖(b)的向量場看起來像流向O，故此場稱為匯場(sink field)，而O稱為匯點(sink)。

在三維空間中相對應的解釋為一流體自一源線(source line)放射狀流出，或呈放射狀流入一匯線(sink line)。

此向量場稱為一個二維向量場，因為它與z無關。

(c) 由於此向量場中每一個向量的大小為$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，所有在球$x^2+y^2+z^2=a^2$，$a>0$ 上的點，其對應的向量大小均為a。所以此向量場好像一個由源點O向空間中各點放射。這是一個三維源場。

補充題

1.31 下列那些是純量？那些是向量？(a)動能，(b)電場強度，(c)熵，(d)功，(e)離心力，(f)溫度，(g)重力位，(h)電荷，(i)剪應力，(j)頻率。

答 (a)純量，(b)向量，(c)純量，(d)純量，(e)向量，(f)純量，(g)純量，(h)純量，(i)向量，(j)純量。

1.32 一飛機先向正西飛行200哩，再向西偏北60°飛行150哩，用(a)圖形法，(b)分析法求其總位移。

答 大小304.1哩($50\sqrt{37}$)，方向東偏北25°17′(arc sin $3\sqrt{111}/74$)。

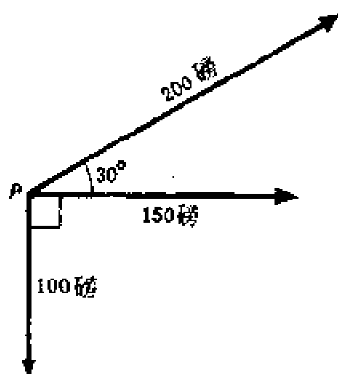
1.33 求下列位移的總位移：**A**，20哩東偏南30°；**B**，50哩正西；**C**，40哩東北；**D**，30哩西偏南30°。

答 大小20.9哩，方向西偏南21°39′。

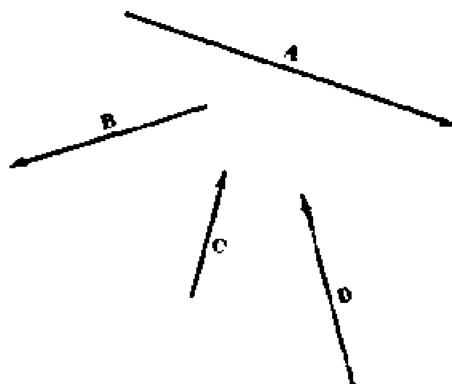
1.34 用圖形法證明$-(\mathbf{A}-\mathbf{B})=-\mathbf{A}+\mathbf{B}$。

1.35 一物P被圖(a)所示的三個共面的力作用，決定能使P保持不動的力。

答 323磅大小，方向與150磅的力相反。



圖(a)



圖(b)

1.36 給定向量**A**，**B**，**C**，**D**(圖(b)所示)，試作(a) $3\mathbf{A}-2\mathbf{B}-(\mathbf{C}-\mathbf{D})$ (b) $\frac{1}{2}\mathbf{C}+\frac{2}{3}(\mathbf{A}-\mathbf{B}+2\mathbf{D})$.

1.37 若$ABCDEF$為一正六邊形的頂點，求向量**AB**、**AC**、**AD**、**AE**及**AF**的合量。

答 $3\mathbf{AD}$。

1.38 若給定向量 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$，證明 (a) $|\mathbf{A}+\mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|$, (b) $|\mathbf{A}-\mathbf{B}| \geq |\mathbf{A}|-|\mathbf{B}|$.

1.39 證明 $|\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}| \leq |\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|+|\mathbf{C}|$.

1.40 兩城市 A，B 位於一河的正對兩岸河堤上，河寬 8 哩，水流速率 4 哩/時。一人在 A 城想到河對岸的 C 城，此城亦在河邊在 B 城上游 6 哩處。如果此人的船具航速最高 10 哩/時，並且他希望能以最短的時間到達 C 城，則他的航線應如何？他必須花費多少時間？

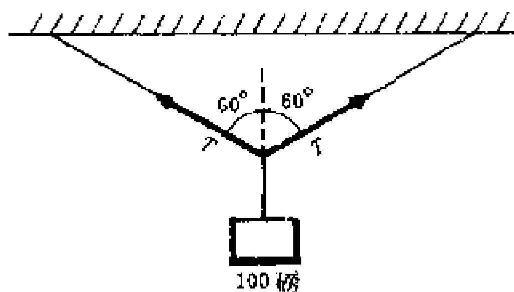
答 向上游與河岸成 $34°28'$ 的方向航行，需時 1 小時 25 分。

1.41 一人以向南 15 哩/時的速度前進，感覺風是由正西吹來。如果他將速率增加為 25 哩/時，感覺風是由西南吹來。求風的方向和速率。

答 風是由西偏北 $56°18'$ 吹來，風速 18 哩/時。

1.42 一個 100 磅的重物掛在一繩的中央，如右圖所示。試求繩上的張力。

答 100 磅。



1.43 化簡 $2\mathbf{A}+\mathbf{B}+3\mathbf{C}-\{\mathbf{A}-2\mathbf{B}-2(2\mathbf{A}-3\mathbf{B}-\mathbf{C})\}$.

答 $5\mathbf{A}-3\mathbf{B}+\mathbf{C}$。

1.44 若 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 為不共線的向量且 $\mathbf{A}=(x+4y)\mathbf{a}+(2x+y+1)\mathbf{b}$，$\mathbf{B}=(y-2x-2)\mathbf{a}+(2x-3y-1)\mathbf{b}$，求 x，y，使得 $3\mathbf{A}=2\mathbf{B}$。

答 $x=2$，$y=-1$。

1.45 基底向量 $\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$ 與基底向量 $\mathbf{b}_1$，$\mathbf{b}_2$，$\mathbf{b}_3$ 之間的關係式為：

$$\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{b}_1+3\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_3, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_1-2\mathbf{b}_2+2\mathbf{b}_3, \quad \mathbf{a}_3 = -2\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2-2\mathbf{b}_3$$

若 $\mathbf{F}=3\mathbf{b}_1-\mathbf{b}_2+2\mathbf{b}_3$，試將 $\mathbf{F}$ 用 $\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$ 表示。

答 $2\mathbf{a}_1+5\mathbf{a}_2+3\mathbf{a}_3$。

1.46 若 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$ 為不共面向量，試決定向量 $\mathbf{r}_1=2\mathbf{a}-3\mathbf{b}+\mathbf{c}$，$\mathbf{r}_2=3\mathbf{a}-5\mathbf{b}+2\mathbf{c}$ 及 $\mathbf{r}_3=4\mathbf{a}-5\mathbf{b}+\mathbf{c}$ 是否為線性獨立？

答 由於 $\mathbf{r}_3=5\mathbf{r}_1-2\mathbf{r}_2$，所以是線性相依。

1.47 若給定二向量 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$，其分別代表一平行四邊形的兩條對角線，試繪此平行四邊形。

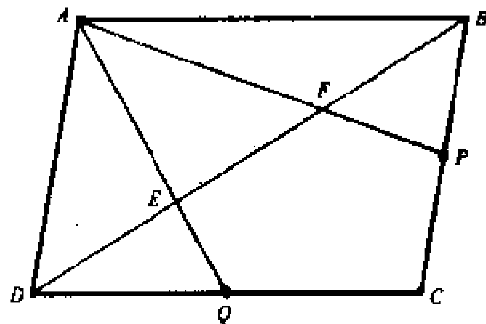
1.48 證明連接三角形之兩邊中點的線段，平行於第三邊且長度為第三邊的一半。

1.49 (a) 若 O 為三角形 ABC 內的任一點，且 P，Q，R 分別為 AB，BC，CA 的中點。證明 $\mathbf{OA}+\mathbf{OB}+\mathbf{OC}=\mathbf{OP}+\mathbf{OQ}+\mathbf{OR}$。

(b) 若 O 在三角形外部，上述結果是否成立？證明之。

答 是的。

1.50 在右圖中，$ABCD$爲一平行四邊形，P，Q分別爲BC及CD的中點。證明AP及AQ將對角線BD三等分。



1.51 證明三角形的三中線交於同一點，此點爲中線的三等分點。

1.52 證明三角形的三條角平分線交於同一點。

1.53 證明對任一三角形，存在一個三角形，它的各邊與給定之三角形的三中線平行且相等。

1.54 令P、Q相對於原點O的位置向量爲$\mathbf{p}$及$\mathbf{q}$。若R將線段PQ分成$m：n$的比例，證明R的位置向量爲$\mathbf{r}=\dfrac{m\mathbf{p}+n\mathbf{q}}{m+n}$，且與原點無關。

1.55 若$\mathbf{r}_1$，$\mathbf{r}_2$，…，$\mathbf{r}_n$分別爲質量m_1，m_2，…，m_n相對於原點O的位置向量，證明質心的位置向量爲

$$\mathbf{r}=\frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2+\dots+m_n\mathbf{r}_n}{m_1+m_2+\dots+m_n}$$

且與原點無關。

1.56 一四邊形$ABCD$，若在四個頂點$A(-1,-2,2)$，$B(3,2,-1)$，$C(1,-2,4)$及$D(3,1,2)$分別有1，2，3，4單位的質點，求質心的座標。

答 (2，0，2)。

1.57 若不共線三點A，B，C相對於原點O的位置向量分別是$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$。證明通過此三點的平面方程式可寫成

$$\mathbf{r}=\frac{m\mathbf{a}+n\mathbf{b}+p\mathbf{c}}{m+n+p}$$

其中m，n，p均爲純量。證明此方程式與原點無關。

1.58 若點P，Q的位置向量爲$\mathbf{r}_1=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$，$\mathbf{r}_2=4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$。試將$\mathbf{PQ}$用$\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$表示，並求出它的大小。

答 $2\mathbf{i}-6\mathbf{j}+3\mathbf{k}$，7

1.59 若 $\mathbf{A}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}-4\mathbf{k}$, $\mathbf{B}=-2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, $\mathbf{C}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$，求

(a) $2\mathbf{A}-\mathbf{B}+3\mathbf{C}$, (b) $|\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}|$, (c) $|3\mathbf{A}-2\mathbf{B}+4\mathbf{C}|$ (d) 平行於$3\mathbf{A}-2\mathbf{B}+4\mathbf{C}$的單位向量。

答　(a) $11\mathbf{i}-8\mathbf{k}$　(b) $\sqrt{93}$　(c) $\sqrt{398}$　(d) $\dfrac{3\mathbf{A}-2\mathbf{B}+4\mathbf{C}}{\sqrt{398}}$

1.60　若有四力：$\mathbf{F}_1=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-5\mathbf{k}$，$\mathbf{F}_2=-5\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k}$，$\mathbf{F}_3=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$，$\mathbf{F}_4=4\mathbf{i}-3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$　均作用在一質點P上。求(a)合力，(b)合力的大小。
答　(a) $2\mathbf{i}-\mathbf{j}$　(b) $\sqrt{5}$。

1.61　決定下列各組向量是否爲線性獨立：
(a) $\mathbf{A}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$，$\mathbf{B}=\mathbf{i}-4\mathbf{k}$，$\mathbf{C}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$，　(b) $\mathbf{A}=\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$，$\mathbf{B}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}-\mathbf{k}$，$\mathbf{C}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$．
答　(a)線性相依，(b)線性獨立。

1.62　證明在三維空間中的四個向量必然線性相依。

1.63　證明向量　$\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$，$\mathbf{B}=B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}$，$\mathbf{C}=C_1\mathbf{i}+C_2\mathbf{j}+C_3\mathbf{k}$　爲線性獨立的充要條件爲行列式 $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$。

1.64　(a)　證明向量 $\mathbf{A}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$，$\mathbf{B}=-\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$，$\mathbf{C}=4\mathbf{i}-2\mathbf{j}-6\mathbf{k}$　可形成一三角形的三邊。
(b)　求此三角形的三中線長。
答　(b) $\sqrt{6}$，$\frac{1}{2}\sqrt{114}$，$\frac{1}{2}\sqrt{150}$

1.65　給定一純量場$\phi(x,y,z)=4yz^3+3xyz-z^2+2$，求(a) $\phi(1,-1,-2)$，(b) $\phi(0,-3,1)$．
答　(a) 36，(b) -11。

1.66　畫出下列向量場：
(a) $\mathbf{V}(x,y)=x\mathbf{i}-y\mathbf{j}$，　(b) $\mathbf{V}(x,y)=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}$，　(c) $\mathbf{V}(x,y,z)=\dfrac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$．

第二章

點積與叉積

2·1 點積或純量積

兩個向量 **A** 及 **B** 的**點積**(dot product)或**純量積**(scalar product),記作 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$(讀作 A dot B),定義爲 **A** 的大小乘上 **B** 的大小再乘上它們兩個夾角的餘弦值。用符號來表示即爲

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta, \qquad 0 \leqq \theta \leqq \pi$$

要注意 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ 是一純量而不是向量。

下列定律均爲正確:

1. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ 點積的交換律
2. $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ 分配律
3. $m(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (m\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot(m\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})m$, m 爲一純量
4. $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1,\quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0$
5. 若 $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ 且 $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$,則

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$
$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = B^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$$

6. 若 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$ 且 **A** 與 **B** 均不爲零向量,則 **A** 與 **B** 垂直。

2·2 叉積或向量積

向量 **A** 與 **B** 的**叉積**(cross product)或**向量積**(vector product)爲一向量 $\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$(讀作 A cross B)。此向量的大小定義爲 **A** 的大小乘上 **B** 的大小再乘上 **A** 與 **B** 夾角的正弦值,而方向則爲垂直於 **A** 與 **B** 所決定的平面,使得 **A**, **B**, **C** 形成一個右旋系統。用符號來表示即爲

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = AB\sin\theta\,\mathbf{u}, \qquad 0 \leqq \theta \leqq \pi$$

其中 **u** 爲指示 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ 之方向的單位向量。若 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ 或 **A** 平行於 **B**,則 $\sin\theta=0$,我們定義 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=0$。

下列定律均為正確：

1. $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ （交換律對叉積不成立）
2. $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\mathbf{C}$ 分配律
3. $m(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (m\mathbf{A})\times\mathbf{B} = \mathbf{A}\times(m\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})m$ ，m 為一純量
4. $\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{0}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$
5. 若 $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ 且 $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ ，則

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

6. $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ 的大小與以 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 為邊的平行四邊形面積相等。
7. 若 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{0}$，且 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 均不為零向量，則 $\mathbf{A}$ 與 $\mathbf{B}$ 平行。

2·3 三重積

三個向量 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$ 的點積與叉積的組合可以產生三種有意義的乘積：$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$，$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ 與 $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$。下面有關的定律均為正確：

1. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} \neq \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$
2. $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ = 以 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$ 為邊的平行六面體體積，正負由 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$ 是否為右旋系統決定。若 $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ 且 $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$ ，則

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

3. $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) \neq (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ （叉積的結合律不成立）
4. $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$
   $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\mathbf{A}$

乘積 $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ 有時稱為**純量三重積**（scalar triple product）或**盒積**（box product），並可用 $[\mathbf{ABC}]$ 表示。乘積 $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ 稱為**向量三重積**（vector triple product）。

在 $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ 中括號常可省略而寫成 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$（參閱 2.41 題），但是在 $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ 中的括號就不可以省略。（參閱 2.29 題與 2.47 題）

2·4　向量集的倒數集

向量集 a，b，c 與 a′，b′，c′ 若有下列關係，則互稱爲向量倒數集或向量倒數系 reciprocal sets or systems of vectors）：

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}' = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}' = \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}' = 1$$

$$\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}'\cdot\mathbf{c} = \mathbf{b}'\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}'\cdot\mathbf{c} = \mathbf{c}'\cdot\mathbf{a} = \mathbf{c}'\cdot\mathbf{b} = 0$$

集合 a，b，c 與 a′，b′，c′ 互爲倒數集若且唯若

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}, \qquad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}, \qquad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}$$

其中 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}\neq 0$。參閱 2.53 及 2.54 題。

習題與解答

點積或純量積

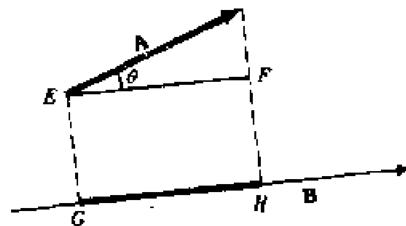
2.1　證明 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$。

解

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta = BA\cos\theta = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$$

則由此證實點積的交換律。

2.2　證明 A 在 B 上的投影等於 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}$，此處 b 爲 B 方向上的單位向量。



解　通過 A 的始點與終點分別向 B 作垂線，垂足分別爲 G 和 H，如右圖所示。則

$$\mathbf{A}\text{ 在 }\mathbf{B}\text{ 上的投影} = \overline{GH} = \overline{EF} = A\cos\theta = \mathbf{A}\cdot\mathbf{b}$$

2.3　證明 $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$.

解　令 a 爲在 A 方向的單位向量，則

(B＋C) 在 A 上的投影＝B 在 A 上的投影＋C 在 A 上的投影

$$(\mathbf{B}+\mathbf{C})\cdot\mathbf{a} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{C}\cdot\mathbf{a}$$

乘上 A 得

$$(\mathbf{B}+\mathbf{C})\cdot A\mathbf{a} = \mathbf{B}\cdot A\mathbf{a} + \mathbf{C}\cdot A\mathbf{a}$$

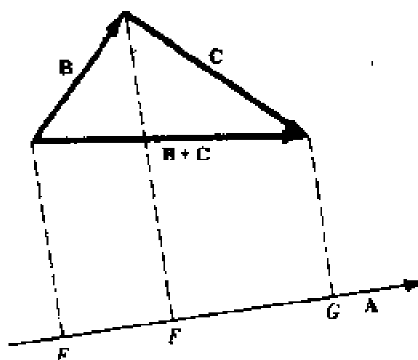
故

$(\mathbf{B}+\mathbf{C})\cdot\mathbf{A} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}$

再由點積的交換律可得

$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$

由此證明了分配律。



2.4 證明 $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}+\mathbf{D}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}$.

答 由2.3題，$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}+\mathbf{D}) = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}+\mathbf{D})+\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}+\mathbf{D}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}$

2.5 計算下列各題：

答 (*a*) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = |\mathbf{i}|\,|\mathbf{i}|\cos 0^\circ = (1)(1)(1) = 1$

(*b*) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = |\mathbf{i}|\,|\mathbf{k}|\cos 90^\circ = (1)(1)(0) = 0$

(*c*) $\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = |\mathbf{k}|\,|\mathbf{j}|\cos 90^\circ = (1)(1)(0) = 0$

(*d*) $\mathbf{j}\cdot(2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}) = 2\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}-3\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}+\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0-3+0 = -3$

(*e*) $(2\mathbf{i}-\mathbf{j})\cdot(3\mathbf{i}+\mathbf{k}) = 2\mathbf{i}\cdot(3\mathbf{i}+\mathbf{k})-\mathbf{j}\cdot(3\mathbf{i}+\mathbf{k})$
$= 6\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+2\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}-3\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}-\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 6+0-0-0 = 6$

2.6 若 $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$ 且 $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}$，證明 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3$.

答

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})\cdot(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k})\\ &= A_1\mathbf{i}\cdot(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}) + A_2\mathbf{j}\cdot(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}) + A_3\mathbf{k}\cdot(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k})\\ &= A_1B_1\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+A_1B_2\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}+A_1B_3\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}+A_2B_1\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}+A_2B_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}+A_2B_3\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}+A_3B_1\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}+A_3B_2\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}+A_3B_3\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\\ &= A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3\end{aligned}$$

因爲 $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1$ 且其他所有的點積均爲 0。

2.7 若 $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$，證明 $A = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = \sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}$

答

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = (A)(A)\cos 0^\circ = A^2$.　　則 $A = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}$.

所以，

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} &= (A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})\cdot(A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})\\ &= (A_1)(A_1)+(A_2)(A_2)+(A_3)(A_3) = A_1^2+A_2^2+A_3^2\end{aligned}$$

由2.6題，取 $\mathbf{B}=\mathbf{A}$。

則 $A = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = \sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}$ 爲 $\mathbf{A}$ 的大小，有時候 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$ 也可寫成 $\mathbf{A}^2$。

2.8 求 $\mathbf{A} = 2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ 與 $\mathbf{B} = 6\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ 的夾角。

答

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=AB\cos\theta,\quad A=\sqrt{(2)^2+(2)^2+(-1)^2}=3,\quad B=\sqrt{(6)^2+(-3)^2+(2)^2}=7$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=(2)(6)+(2)(-3)+(-1)(2)=12-6-2=4$$

則 $\cos\theta=\dfrac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB}=\dfrac{4}{(3)(7)}=\dfrac{4}{21}=0.1905$ 且 $\theta=79^\circ$（近似值）

2.9 若 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$ 且若 A，B 均不爲 0，證明 $\mathbf{A}$ 垂直於 $\mathbf{B}$。

答 若 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=AB\cos\theta=0$，則 $\cos\theta=0$ 或 $\theta=90^\circ$。反之，若 $\theta=90^\circ$，$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$。

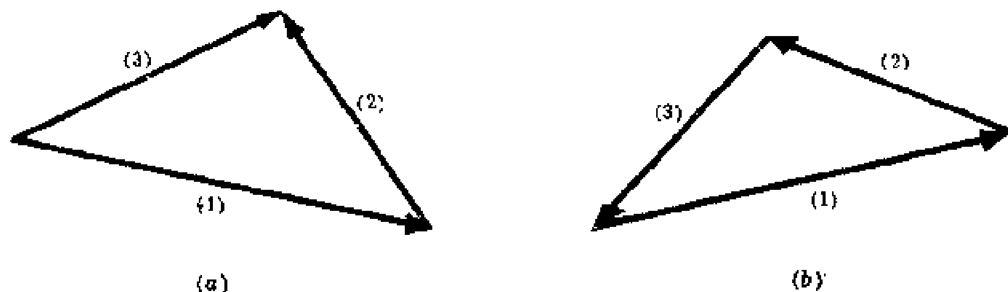
2.10 若 $\mathbf{A}=2\mathbf{i}+a\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 與 $\mathbf{B}=4\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ 垂直，求 a。

答 由 2.9 題，若 $\mathbf{A}$ 與 $\mathbf{B}$ 垂直，則 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$。

因此 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=(2)(4)+(a)(-2)+(1)(-2)=8-2a-2=0$ 即 $a=3$

2.11 證明向量 $\mathbf{A}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$，$\mathbf{B}=\mathbf{i}-3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$，$\mathbf{C}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ 形成一個直角三角形。

答 首先我們要證明此三向量可形成一個三角形。



由圖形可看出，若此三向量滿足下列條件之一，則可形成一個三角形。

(a) 其中一個向量，例如(3)，爲另兩個向量的合量。

(b) 三個向量的和(1)＋(2)＋(3)等於零向量。

根據(a)則有兩個向量有相同的終點，而依據(b)則三個向量的終點都不同。經由試算，我們發現 $\mathbf{A}=\mathbf{B}+\mathbf{C}$，所以此三向量可形成一個三角形。

由於 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=(3)(1)+(-2)(-3)+(1)(5)=14$，$\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=(3)(2)+(-2)(1)+(1)(-4)=0$，且 $\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}=(1)(2)+(-3)(1)+(5)(-4)=-21$，因此 $\mathbf{A}$ 與 $\mathbf{C}$ 垂直，所以此三角形爲一直角三角形。

2.12 求向量 $\mathbf{A}=3\mathbf{i}-6\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ 與座標軸的夾角。

答 令 α，β，γ 分別爲 $\mathbf{A}$ 與正 x，y，z 軸的夾角。

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}=(A)(1)\cos\alpha=\sqrt{(3)^2+(-6)^2+(2)^2}\cos\alpha=7\cos\alpha$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}=(3\mathbf{i}-6\mathbf{j}+2\mathbf{k})\cdot\mathbf{i}=3\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}-6\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}+2\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=3$$

則 $\cos\alpha = 3/7 = 0.4286$，且 $\alpha = 64.6°$（近似值）。

同理，$\cos\beta = -6/7$, $\beta = 149°$ 且 $\cos\gamma = 2/7$, $\gamma = 73.4°$.

α，β，γ 的餘弦值稱爲 **A** 的**方向餘弦**（direction consines）。（參閱 1.27 題）

2.13 求向量 $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ 在向量 $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ 上的投影。

解

在 **B** 方向的單位向量 $\mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{B}}{B} = \dfrac{4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}}{\sqrt{(4)^2 + (-4)^2 + (7)^2}} = \dfrac{4}{9}\mathbf{i} - \dfrac{4}{9}\mathbf{j} + \dfrac{7}{9}\mathbf{k}$.

$$\mathbf{A}\text{ 在 }\mathbf{B}\text{ 上的投影} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{b} = (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})\cdot\left(\frac{4}{9}\mathbf{i} - \frac{4}{9}\mathbf{j} + \frac{7}{9}\mathbf{k}\right)$$

$$= (1)\left(\frac{4}{9}\right) + (-2)\left(-\frac{4}{9}\right) + (1)\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{19}{9}.$$

2.14 證明平面三角的餘弦定律。

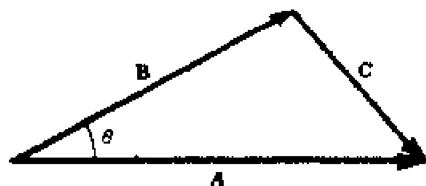
解 由圖(a)，$\mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{A}$ 或 $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$.

則

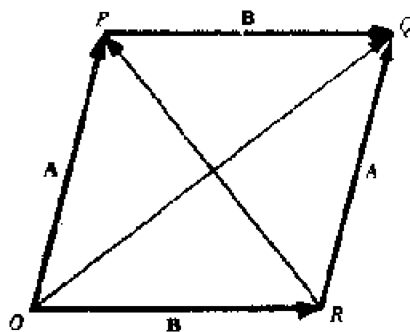
$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{C} = (\mathbf{A} - \mathbf{B})\cdot(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B} - 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$$

且

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta.$$



圖(a)



圖(b)

2.15 證明菱形的兩對角線互相垂直，參考圖(b)。

解 $\mathbf{OQ} = \mathbf{OP} + \mathbf{PQ} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$

$\mathbf{OR} + \mathbf{RP} = \mathbf{OP}$ 或 $\mathbf{B} + \mathbf{RP} = \mathbf{A}$ 且 $\mathbf{RP} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$

則

$$\mathbf{OQ}\cdot\mathbf{RP} = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = A^2-B^2 = 0,\ \text{因爲}\ A=B.$$

因此 **OQ** 垂直於 **RP** 。

2.16 試求一個與由 $\mathbf{A}=2\mathbf{i}-6\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ 及 $\mathbf{B}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ 所決定之平面垂直的單位向量。

答 令向量 $\mathbf{C}=c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}-c_3\mathbf{k}$ 垂直於 **A**、**B** 所決定的平面，則 **C** 垂直於 **A**，也垂直於 **B**。因此

$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{A} = 2c_1-6c_2-3c_3 = 0 \quad 或 \quad (1)\ 2c_1-6c_2 = 3c_3$$
$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{B} = 4c_1+3c_2-c_3 = 0 \quad 或 \quad (2)\ 4c_1+3c_2 = c_3$$

解(1)、(2)聯立方程式：$c_1=\frac{1}{2}c_3,\ c_2=-\frac{1}{3}c_3,\ \mathbf{C}=c_3(\frac{1}{2}\mathbf{i}-\frac{1}{3}\mathbf{j}+\mathbf{k}).$

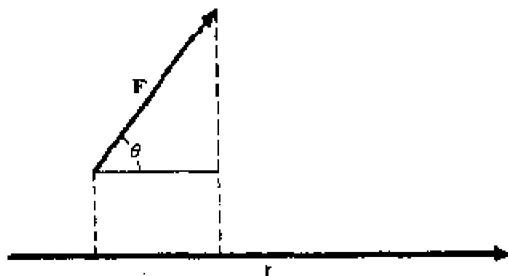
則在 **C** 方向的一個單位向量爲 $\frac{\mathbf{C}}{C} = \frac{c_3(\frac{1}{2}\mathbf{i}-\frac{1}{3}\mathbf{j}+\mathbf{k})}{\sqrt{c_3^2[(\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{3})^2+(1)^2]}} = \pm(\frac{3}{7}\mathbf{i}-\frac{2}{7}\mathbf{j}+\frac{6}{7}\mathbf{k}).$

2.17 若一力 $\mathbf{F}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$ 將一物沿著向量 $\mathbf{r}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ 移動，求所作之功。參考圖(a)。

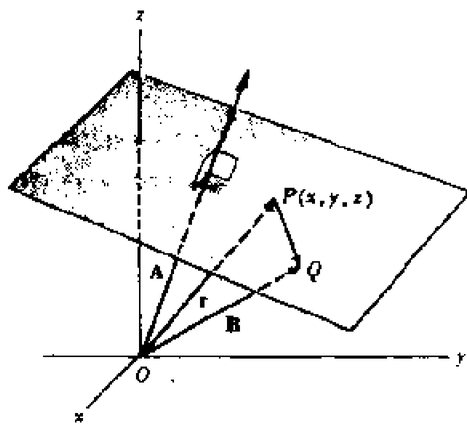
答

所做的功＝（力在移動方向的大小）·（移動距離）

$$= (F\cos\theta)(r) = \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}$$
$$= (2\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})\cdot(3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-5\mathbf{k}) = 6-2+5 = 9.$$



圖(a)



圖(b)

2.18 求與向量 $\mathbf{A}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ 垂直且通過向量 $\mathbf{B}=\mathbf{i}+5\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ 之終點的平面方程式。（參考圖(b)）

答 令 **r** 爲點 P 的位置向量，Q 爲 **B** 的終點。

由於 $\mathbf{PQ}=\mathbf{B}-\mathbf{r}$ 與 $\mathbf{A}$ 垂直，所以 $(\mathbf{B}-\mathbf{r})\cdot\mathbf{A}=0$ 或 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ 爲所要求之平面方程式的向量表示法。換成直角座標則變爲

$$(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\cdot(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k}) = (\mathbf{i}+5\mathbf{j}+3\mathbf{k})\cdot(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k})$$

或

$$2x+3y+6z = (1)(2)+(5)(3)+(3)(6) = 35$$

2.19 在 2.18 題中，求原點與此平面的距離。

解 由原點至平面的距離也就等於 $\mathbf{B}$ 在 $\mathbf{A}$ 上的投影。

在 $\mathbf{A}$ 方向的一個單位向量爲 $\mathbf{a}=\dfrac{\mathbf{A}}{A}=\dfrac{2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k}}{\sqrt{(2)^2+(3)^2+(6)^2}}=\dfrac{2}{7}\mathbf{i}+\dfrac{3}{7}\mathbf{j}+\dfrac{6}{7}\mathbf{k}.$

則 $\mathbf{B}$ 在 $\mathbf{A}$ 上的投影 $=\mathbf{B}\cdot\mathbf{a}=(\mathbf{i}+5\mathbf{j}+3\mathbf{k})\cdot(\frac{2}{7}\mathbf{i}+\frac{3}{7}\mathbf{j}+\frac{6}{7}\mathbf{k})$

$$= 1(\tfrac{2}{7})+5(\tfrac{3}{7})+3(\tfrac{6}{7}) = 5.$$

2.20 若 $\mathbf{A}$ 爲任一向量，證明 $\mathbf{A}=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}+(\mathbf{A}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j}+(\mathbf{A}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}.$

解 由於

$\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$，因此 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}=A_1\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}+A_3\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=A_1$

同理

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{j}=A_2 \quad , \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{k}=A_3 .$$

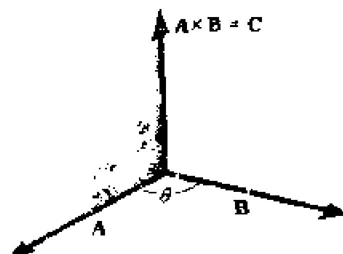
則

$$\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}+(\mathbf{A}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j}+(\mathbf{A}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}.$$

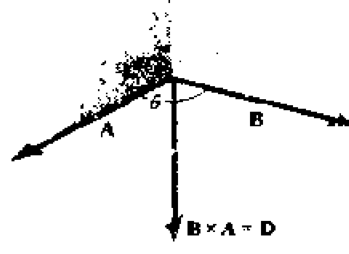
叉積或向量積

2.21 證明 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A}.$

解



圖(a)



圖(b)

$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{C}$ 的大小爲 $AB\sin\theta$，而方向是使 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$ 形成一右旋系統（見圖(a)）。

$\mathbf{B}\times\mathbf{A}=\mathbf{D}$ 的大小爲 $BA\sin\theta$，而方向是使 $\mathbf{B}$，$\mathbf{A}$，$\mathbf{D}$ 形成一右旋系統（見圖(b)）。

因此，$\mathbf{C}$ 與 $\mathbf{D}$ 的大小相同但方向相反，即 $\mathbf{C}=-\mathbf{D}$ 或 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A}$。

對叉積而言，交換律不成立。

2.22 若$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=0$且若$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$均不爲零向量，證明$\mathbf{A}$與$\mathbf{B}$平行。

解 若$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=AB\sin\theta\,\mathbf{u}=0$，則$\sin\theta=0$即$\theta=0^\circ$或$180^\circ$。

2.23 證明$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^2+|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}|^2=|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2$.

解 $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^2+|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}|^2=|AB\sin\theta\,\mathbf{u}|^2+|AB\cos\theta|^2=A^2B^2\sin^2\theta+A^2B^2\cos^2\theta$

$=A^2B^2=|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2$

2.24 求下列各題：

解 (a) $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$

(c) $\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$

(d) $\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{j}\times\mathbf{k}=-\mathbf{i}$

(e) $\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{0}$

(f) $\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{0}$

(g) $\mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{k}\times\mathbf{i}=-\mathbf{j}$

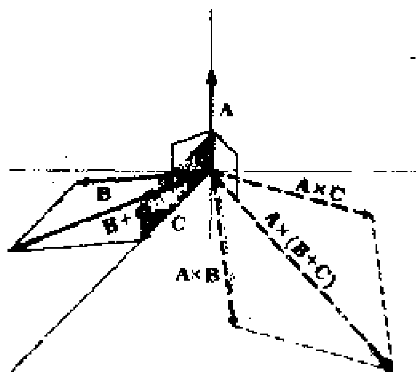
(h) $(2\mathbf{j})\times(3\mathbf{k})=6\,\mathbf{j}\times\mathbf{k}=6\mathbf{i}$

(i) $(3\mathbf{i})\times(-2\mathbf{k})=-6\,\mathbf{i}\times\mathbf{k}=6\mathbf{j}$

(j) $2\mathbf{j}\times\mathbf{i}-3\mathbf{k}=-2\mathbf{k}-3\mathbf{k}=-5\mathbf{k}$

2.25 證明若$\mathbf{A}$垂直於$\mathbf{B}$，且$\mathbf{A}$垂直於$\mathbf{C}$，則$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}$。

解 由於$\mathbf{A}$與$\mathbf{B}$垂直，所以$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$爲一與$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$所決定之平面垂直的向量，且其大小爲$AB\sin 90^\circ=AB$與$AB$的大小相同。此即等於將$A$乘上$\mathbf{B}$，再將它旋轉$90^\circ$至右圖所示的位置。



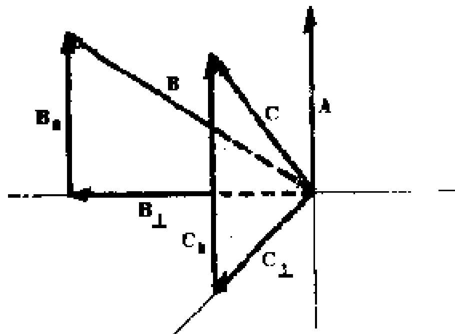
同理，$\mathbf{A}\times\mathbf{C}$也可以將$A$乘上$\mathbf{C}$，再旋轉$90^\circ$至圖中所示的位置。

同樣地，$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})$也可看成將$A$乘上$\mathbf{B}+\mathbf{C}$，並將其旋轉$90^\circ$至圖中所示的位置。

由於$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})$是以$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$及$\mathbf{A}\times\mathbf{C}$爲邊之平行四邊形的對角線，所以$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}$。

2.26 證明在一般情況，若$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$不共面，則$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}$。

解 我們將$\mathbf{B}$分解爲兩個分向量，一個與$\mathbf{A}$垂直，一個與$\mathbf{A}$平行。並將它們分別表示成$\mathbf{B}_\perp$及$\mathbf{B}_\parallel$。則$\mathbf{B}=\mathbf{B}_\perp+\mathbf{B}_\parallel$。



若θ爲$\mathbf{A}$與$\mathbf{B}$的夾角，則$B_\perp=B\sin\theta$，因此$\mathbf{A}\times\mathbf{B}_\perp$的

的大小為$AB\sin\theta$，與$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$的大小相同，同時，$\mathbf{A}\times\mathbf{B}_\perp$的方向與$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$的方向相同，所以$\mathbf{A}\times\mathbf{B}_\perp=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$。

同理若將$\mathbf{C}$也按$\mathbf{B}$的方式分解成兩個分別與$\mathbf{A}$垂直或平行的分向量$\mathbf{C}_\perp$，$\mathbf{C}_\parallel$，則$\mathbf{A}\times\mathbf{C}_\perp=\mathbf{A}\times\mathbf{C}$。

同時，由於

$$\mathbf{B}+\mathbf{C} = \mathbf{B}_\perp+\mathbf{B}_\parallel+\mathbf{C}_\perp+\mathbf{C}_\parallel = (\mathbf{B}_\perp+\mathbf{C}_\perp)+(\mathbf{B}_\parallel+\mathbf{C}_\parallel)$$ 因此，

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}_\perp+\mathbf{C}_\perp) = \mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}).$$

現在$\mathbf{B}_\perp$與$\mathbf{C}_\perp$為與$\mathbf{A}$垂直的向量，所以由2.25題可得

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}_\perp+\mathbf{C}_\perp) = \mathbf{A}\times\mathbf{B}_\perp+\mathbf{A}\times\mathbf{C}_\perp$$

則

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}$$

因此分配律成立。將上式乘上-1，利用2.21題可變成$(\mathbf{B}+\mathbf{C})\times\mathbf{A}=\mathbf{B}\times\mathbf{A}+\mathbf{C}\times\mathbf{A}$。注意在叉積中，因子的順序非常重要。這個代數上常用的分配律，只有在保持因子的正確順序時才成立。

2.27 若 $\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$ 且 $\mathbf{B}=B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}$ 證明 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\A_1&A_2&A_3\\B_1&B_2&B_3\end{vmatrix}$

解
$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= (A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})\times(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k})\\
&= A_1\mathbf{i}\times(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}) + A_2\mathbf{j}\times(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}) + A_3\mathbf{k}\times(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k})\\
&= A_1B_1\mathbf{i}\times\mathbf{i}+A_1B_2\mathbf{i}\times\mathbf{j}+A_1B_3\mathbf{i}\times\mathbf{k}+A_2B_1\mathbf{j}\times\mathbf{i}+A_2B_2\mathbf{j}\times\mathbf{j}+A_2B_3\mathbf{j}\times\mathbf{k}+A_3B_1\mathbf{k}\times\mathbf{i}+A_3B_2\mathbf{k}\times\mathbf{j}+A_3B_3\mathbf{k}\times\mathbf{k}\\
&= (A_2B_3-A_3B_2)\mathbf{i}+(A_3B_1-A_1B_3)\mathbf{j}+(A_1B_2-A_2B_1)\mathbf{k} = \begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\A_1&A_2&A_3\\B_1&B_2&B_3\end{vmatrix}\end{aligned}$$

2.28 若 $\mathbf{A}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ 且 $\mathbf{B}=\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$，求 (a) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$，(b) $\mathbf{B}\times\mathbf{A}$，(c) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times(\mathbf{A}-\mathbf{B})$。

解

(a) $$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k})\times(\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}) = \begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\2&-3&-1\\1&4&-2\end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\begin{vmatrix}-3&-1\\4&-2\end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix}2&-1\\1&-2\end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix}2&-3\\1&4\end{vmatrix} = 10\mathbf{i}+3\mathbf{j}+11\mathbf{k}$$

另解

$$\begin{aligned}(2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k})\times(\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}) &= 2\mathbf{i}\times(\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k})-3\mathbf{j}\times(\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k})-\mathbf{k}\times(\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k})\\
&= 2\mathbf{i}\times\mathbf{i}+8\mathbf{i}\times\mathbf{j}-4\mathbf{i}\times\mathbf{k}-3\mathbf{j}\times\mathbf{i}-12\mathbf{j}\times\mathbf{j}+6\mathbf{j}\times\mathbf{k}-\mathbf{k}\times\mathbf{i}\\
&\quad -4\mathbf{k}\times\mathbf{j}+2\mathbf{k}\times\mathbf{k}\\
&= \mathbf{0}+8\mathbf{k}+4\mathbf{j}+3\mathbf{k}-\mathbf{0}+6\mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{i}+\mathbf{0} = 10\mathbf{i}+3\mathbf{j}+11\mathbf{k}\end{aligned}$$

(b) $\mathbf{B}\times\mathbf{A} = (\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k})\times(2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

$$= \mathbf{i}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -10\mathbf{i}-3\mathbf{j}-11\mathbf{k}.$$

與(a)比較可知，$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$。注意這與下面的定理是等價的：若一行列式的兩行互換，則其值變號。

(c) $\mathbf{A}+\mathbf{B} = (2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k})+(\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}) = 3\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$

$\mathbf{A}-\mathbf{B} = (2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k})-(\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}) = \mathbf{i}-7\mathbf{j}+\mathbf{k}$

則 $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = (3\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k})\times(\mathbf{i}-7\mathbf{j}+\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \mathbf{i}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -20\mathbf{i}-6\mathbf{j}-22\mathbf{k}.$$

另解

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times(\mathbf{A}-\mathbf{B}) &= \mathbf{A}\times(\mathbf{A}-\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\mathbf{A}-\mathbf{B}) \\ &= \mathbf{A}\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{B}\times\mathbf{A} - \mathbf{B}\times\mathbf{B} = \mathbf{0} - \mathbf{A}\times\mathbf{B} - \mathbf{A}\times\mathbf{B} - \mathbf{0} \\ &= -2\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -2(10\mathbf{i}+3\mathbf{j}+11\mathbf{k}) = -20\mathbf{i}-6\mathbf{j}-22\mathbf{k}, \text{ 利用(a)}\end{aligned}$$

2.29 若 $\mathbf{A}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{B}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{C}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, 求 (*a*) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$, (*b*) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$.

解

(a) $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i}+7\mathbf{j}+5\mathbf{k}.$

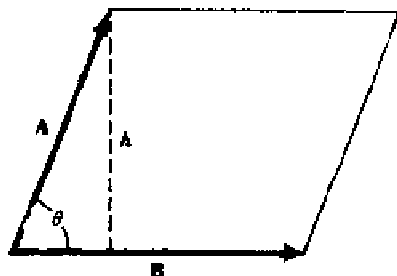
則 $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = (-\mathbf{i}+7\mathbf{j}+5\mathbf{k})\times(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 24\mathbf{i}+7\mathbf{j}-5\mathbf{k}.$

(b) $\mathbf{B}\times\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i}-5\mathbf{j}-5\mathbf{k} = -5\mathbf{j}-5\mathbf{k}.$

則 $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (3\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k})\times(-5\mathbf{j}-5\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 15\mathbf{i}+15\mathbf{j}-15\mathbf{k}.$

因此 $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} \neq \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$，由此顯示在 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ 中，括號是必要的。

2.30 證明以 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 爲邊的平行四邊形面積爲 $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$。



解

$$\begin{aligned}\text{平行四邊形面積} &= h|\mathbf{B}| \\ &= |\mathbf{A}|\sin\theta\,|\mathbf{B}| \\ &= |\mathbf{A}\times\mathbf{B}|.\end{aligned}$$

同時注意以 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 爲邊的三角形面積爲 $\frac{1}{2}|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$。

2.31　求頂點在$P(1,3,2)$，$Q(2,-1,1)$，$R(-1,2,3)$之三角形的面積。

圖

$$\mathbf{PQ} = (2-1)\mathbf{i} + (-1-3)\mathbf{j} + (1-2)\mathbf{k} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$$
$$\mathbf{PR} = (-1-1)\mathbf{i} + (2-3)\mathbf{j} + (3-2)\mathbf{k} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

由2.30題，

$$\text{三角形面積} = \tfrac{1}{2}|\mathbf{PQ}\times\mathbf{PR}| = \tfrac{1}{2}|(\mathbf{i}-4\mathbf{j}-\mathbf{k})\times(-2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})|$$
$$= \tfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}|-5\mathbf{i}+\mathbf{j}-9\mathbf{k}| = \tfrac{1}{2}\sqrt{(-5)^2+(1)^2+(-9)^2}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{107}.$$

2.32　試求一個與由$\mathbf{A}=2\mathbf{i}-6\mathbf{j}-3\mathbf{k}$，$\mathbf{B}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$所決定之平面垂直的單位向量。

圖　$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$是一個與由$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$決定之平面垂直的向量。

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 30\mathbf{k}$$

一個與$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$平行的單位向量爲 $\dfrac{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|} = \dfrac{15\mathbf{i}-10\mathbf{j}+30\mathbf{k}}{\sqrt{(15)^2+(-10)^2+(30)^2}} = \dfrac{3}{7}\mathbf{i} - \dfrac{2}{7}\mathbf{j} + \dfrac{6}{7}\mathbf{k}.$

另一個反方向的單位向量爲$(-3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-6\mathbf{k})/7$。

請與2.16題比較。

2.33　證明平面三角的正弦定律。

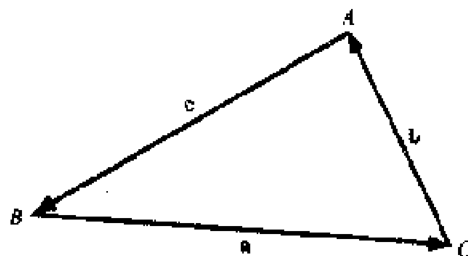


圖　令$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$代表三角形ABC的各邊，如右圖所示，則$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$。將此式連續乘上$\mathbf{a}\times$，$\mathbf{b}\times$，$\mathbf{c}\times$，我們可求出

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{c}\times\mathbf{a}$$

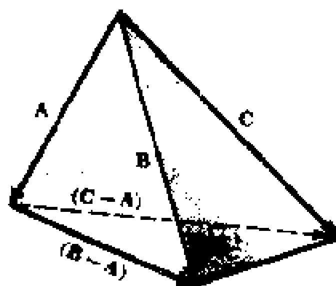
即

$$ab\sin C = bc\sin A = ca\sin B$$

或

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

2.34　考慮四面爲F_1，F_2，F_3，F_4的四面體。令$\mathbf{V}_1$，$\mathbf{V}_2$，$\mathbf{V}_3$，$\mathbf{V}_4$爲四個向量，其大小分別等於F_1，F_2，F_3，F_4的面積，且方向均與各面垂直向外。試證$\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2+\mathbf{V}_3+\mathbf{V}_4=0$。



解　由 2.30 題，由 $\mathbf{R}$ 及 $\mathbf{S}$ 所決定的三角形面積等於 $\frac{1}{2}|\mathbf{R}\times\mathbf{S}|$。

與此四面體各面相關的向量爲

$$\mathbf{V}_1 = \tfrac{1}{2}\mathbf{A}\times\mathbf{B},\quad \mathbf{V}_2 = \tfrac{1}{2}\mathbf{B}\times\mathbf{C},\quad \mathbf{V}_3 = \tfrac{1}{2}\mathbf{C}\times\mathbf{A},\quad \mathbf{V}_4 = \tfrac{1}{2}(\mathbf{C}-\mathbf{A})\times(\mathbf{B}-\mathbf{A})$$

則

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2+\mathbf{V}_3+\mathbf{V}_4 &= \tfrac{1}{2}[\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{B}\times\mathbf{C}+\mathbf{C}\times\mathbf{A}+(\mathbf{C}-\mathbf{A})\times(\mathbf{B}-\mathbf{A})]\\ &= \tfrac{1}{2}[\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{B}\times\mathbf{C}+\mathbf{C}\times\mathbf{A}+\mathbf{C}\times\mathbf{B}-\mathbf{C}\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{A}] = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

此結果可推廣至任意封閉多面體及任意封閉曲面的極限情況。

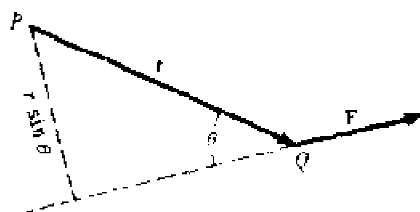
因爲這個應用，我們有時候會賦予面積一個方向，而稱爲**向量面積**（vector area）。

2.35　求一力 $\mathbf{F}$ 對一點 P 的力矩表示式。

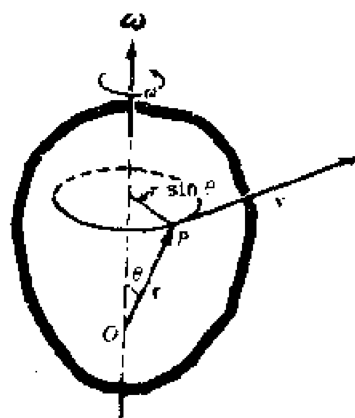
解　$\mathbf{F}$ 對於 P 的力矩 $\mathbf{M}$ 的大小等於 F 乘上 P 至 $\mathbf{F}$ 的垂直距離，所以如果 $\mathbf{r}$ 是由 P 至 $\mathbf{F}$ 之終點 Q 的向量，則

$$M = F(r\sin\theta) = rF\sin\theta = |\mathbf{r}\times\mathbf{F}|$$

如果我們假想在 P 點有一個與 $\mathbf{r}$ 及 $\mathbf{F}$ 垂直的右旋螺旋，則當力 $\mathbf{F}$ 作用在此螺旋上，其將向 $\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ 的方向移動。因此，我們可以很方便的將此力矩定義爲向量 $\mathbf{M}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$。



2.36　一剛體繞一過點 O 之軸，以角速率 ω 旋轉。證明在此剛體上一點 P，若其位置向量爲 $\mathbf{r}$，則其線速度 $\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$，其中 $\boldsymbol{\omega}$ 爲大小是 ω 的向量，其方向是在所給的旋轉之下，右旋螺旋的前進方向。

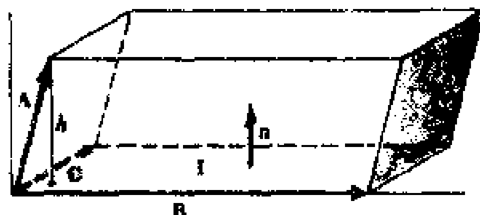


解　由於 P 是在半徑 $r\sin\theta$ 的圓上運動，所以線速度 $\mathbf{v}$ 的大小爲 $\omega(r\sin\theta)=|\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}|$。同時，$\mathbf{v}$ 必須同時與 $\boldsymbol{\omega}$ 及 $\mathbf{r}$ 垂直，並且 $\mathbf{r}$，$\boldsymbol{\omega}$，$\mathbf{v}$ 形成一個右旋系統。

因此 $\mathbf{v}$ 的大小和方向都和 $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ 相同，故 $\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$。向量 $\boldsymbol{\omega}$ 稱爲**角速度**（angular velocity）。

三重積

2.37 證明$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$的絕對值等於以$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$為邊的平行六面體體積。



解 令$\mathbf{n}$為平行四邊形I的單位法向量，其方向與$\mathbf{B}\times\mathbf{C}$相同，且令$h$為$\mathbf{A}$的終點至平行四邊形$I$的高。

平行六面體的體積＝（高h）（平行四邊形I的面積）

$$=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})(|\mathbf{B}\times\mathbf{C}|)$$

$$=\mathbf{A}\cdot\{|\mathbf{B}\times\mathbf{C}|\mathbf{n}\}=\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

若$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$不是右旋系統，則$\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}<0$，而體積$=|\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})|$。

2.38 若 $\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$，$\mathbf{B}=B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}$，$\mathbf{C}=C_1\mathbf{i}+C_2\mathbf{j}+C_3\mathbf{k}$ 證明

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}$$

解
$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}$$

$$=(A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})\cdot[(B_2C_3-B_3C_2)\mathbf{i}+(B_3C_1-B_1C_3)\mathbf{j}+(B_1C_2-B_2C_1)\mathbf{k}]$$

$$=A_1(B_2C_3-B_3C_2)+A_2(B_3C_1-B_1C_3)+A_3(B_1C_2-B_2C_1)=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}$$

2.39 求 $(2\mathbf{i}-3\mathbf{j})\cdot[(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})\times(3\mathbf{i}-\mathbf{k})]$.

解

利用2.38題，其結果為 $\begin{vmatrix}2 & -3 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 3 & 0 & -1\end{vmatrix}=4.$

另解 $(2\mathbf{i}-3\mathbf{j})\cdot[\mathbf{i}\times(3\mathbf{i}-\mathbf{k})+\mathbf{j}\times(3\mathbf{i}-\mathbf{k})-\mathbf{k}\times(3\mathbf{i}-\mathbf{k})]$

$$=(2\mathbf{i}-3\mathbf{j})\cdot[3\mathbf{i}\times\mathbf{i}-\mathbf{i}\times\mathbf{k}+3\mathbf{j}\times\mathbf{i}-\mathbf{j}\times\mathbf{k}-3\mathbf{k}\times\mathbf{i}+\mathbf{k}\times\mathbf{k}]$$

$$=(2\mathbf{i}-3\mathbf{j})\cdot(0+\mathbf{j}-3\mathbf{k}-\mathbf{i}-3\mathbf{j}+0)$$

$$=(2\mathbf{i}-3\mathbf{j})\cdot(-\mathbf{i}-2\mathbf{j}-3\mathbf{k})=(2)(-1)+(-3)(-2)+(0)(-3)=4.$$

2.40 證明 $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$.

答

由 2.38 題，$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$

再利用行列式中兩列互換其值變號的定理可得

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$

2.41 證明 $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$.

答 由 2.40 題，

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$$

有時候 $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ 會寫成沒有括號的形式 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ 。此時不會發生任何混淆，因為此式只可能解釋成 $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ 或 $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\times\mathbf{C}$，而後者是一個純量與向量的叉積，這是沒有意義的。

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$ 這個結果有時候我們將它敘述為：點積與叉積可以互換而不影響其結果。

2.42 證明 $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{C}) = 0$.

答 由 2.41 題，

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{C} = 0.$$

2.43 證明向量 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ 共面的充要條件為 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=0$ 。

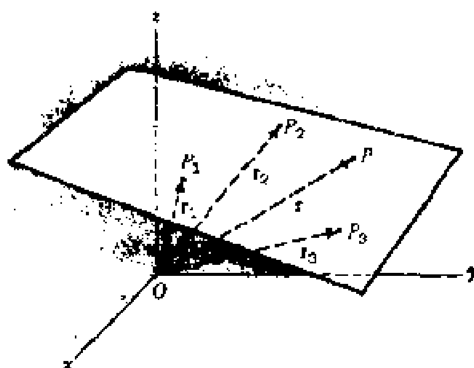
答 注意 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ 除了 $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ 以外，沒有其他的解釋。

若 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ 共面，則由它們所形成的平行六面體體積等於 0 ，則由 2.37 題可知 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=0$ 。

反之，若 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=0$ ，則由向量 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ 所形成的平行六面體體積為 0 ，因此它們必落在同一平面上。

2.44 令 $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_3 = x_3\mathbf{i}+y_3\mathbf{j}+z_3\mathbf{k}$ 分別為點 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ 的位置向量，求通過 P_1, P_2, P_3 的平面方程式。

答 我們假設 P_1, P_2, P_3 不共線，因此它們可決定一平面。



令 $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 代表此平面上任一點 $P(x,y,z)$ 的位置向量。考慮向量 $\mathbf{P_1P_2}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$，$\mathbf{P_1P_3}=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1$，$\mathbf{P_1P}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$ 均在此平面上。

由2.43題，$\mathbf{P_1P}\cdot\mathbf{P_1P_2}\times\mathbf{P_1P_3}=0$

或 $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\times(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)=0$

用直角座標來表示則變成 $[(x-x_1)\mathbf{i}+(y-y_1)\mathbf{j}+(z-z_1)\mathbf{k}]\cdot[(x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}+$

$(z_2-z_1)\mathbf{k}]\times[(x_3-x_1)\mathbf{i}+(y_3-y_1)\mathbf{j}+(z_3-z_1)\mathbf{k}]=0$

或者利用2.38題，$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$.

2.45 求由點 $P_1(2,-1,1)$，$P_2(3,2,-1)$ 及 $P_3(-1,3,2)$ 所決定的平面方程式。

解 P_1，P_2，P_3 及任意點 P 的位置向量分別是 $\mathbf{r}_1=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$，$\mathbf{r}_2=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$，$\mathbf{r}_3=-\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ 及 $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$。

則 $\mathbf{P_1P}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$，$\mathbf{P_1P_2}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$，$\mathbf{P_1P_3}=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1$ 都在所要求的平面上，所以

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\times(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)=0$$

即

$$[(x-2)\mathbf{i}+(y+1)\mathbf{j}+(z-1)\mathbf{k}]\cdot[\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}]\times[-3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+\mathbf{k}]=0$$

$$[(x-2)\mathbf{i}+(y+1)\mathbf{j}+(z-1)\mathbf{k}]\cdot[11\mathbf{i}+5\mathbf{j}+13\mathbf{k}]=0$$

$$11(x-2)+5(y+1)+13(z-1)=0 \quad \text{或} \quad 11x+5y+13z=30.$$

2.46 若點 P，Q，R 不共線，且相對於一原點的位置向量分別為 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$。證明 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ 為一與 P，Q，R 所在之平面垂直的向量。

解 令 $\mathbf{r}$ 為在 P，Q，R 之平面上任一點的位置向量，則向量 $\mathbf{r}-\mathbf{a}$，$\mathbf{b}-\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ 共面，所以由2.43題可得

$$(\mathbf{r}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = 0 \quad \text{或} \quad (\mathbf{r}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = 0.$$

因此向量 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{r}-\mathbf{a}$ 垂直，所以也垂直於 P，Q，R 之平面。

2.47 證明 (a) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$, (b) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$.

解 (a) 令

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{C} = C_1\mathbf{i}+C_2\mathbf{j}+C_3\mathbf{k}.$$

則

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})\times\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}$$

$$= (A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})\times([B_2C_3-B_3C_2]\mathbf{i}+[B_3C_1-B_1C_3]\mathbf{j}+[B_1C_2-B_2C_1]\mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_2C_3-B_3C_2 & B_3C_1-B_1C_3 & B_1C_2-B_2C_1\end{vmatrix}$$

$$= (A_2B_1C_2-A_2B_2C_1-A_3B_3C_1+A_3B_1C_3)\mathbf{i} + (A_3B_2C_3-A_3B_3C_2-A_1B_1C_2+A_1B_2C_1)\mathbf{j}$$
$$+ (A_1B_3C_1-A_1B_1C_3-A_2B_2C_3+A_2B_3C_2)\mathbf{k}$$

同時

$$\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$
$$= (B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k})(A_1C_1+A_2C_2+A_3C_3)-(C_1\mathbf{i}+C_2\mathbf{j}+C_3\mathbf{k})(A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3)$$
$$= (A_2B_1C_2+A_3B_1C_3-A_2C_1B_2-A_3C_1B_3)\mathbf{i} + (B_2A_1C_1+B_2A_3C_3-C_2A_1B_1-C_2A_3B_3)\mathbf{j}$$
$$+ (B_3A_1C_1+B_3A_2C_2-C_3A_1B_1-C_3A_2B_2)\mathbf{k}$$

因此得證。

(b) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = -\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = -\{\mathbf{A}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{B})-\mathbf{B}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{A})\} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$ 乃分別以 $\mathbf{C}$，$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 取代(a)中的 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$。

注意 $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\neq(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$，也就是說向量叉積的結合律並不是對所有的向量 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$ 都成立。

2.48 證明 $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$.

解 由 2.41 題，

$$\mathbf{X}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = (\mathbf{X}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{D}. \quad \text{令} \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}\times\mathbf{B};$$

則 $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = \{(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}\}\cdot\mathbf{D} = \{\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\}\cdot\mathbf{D}$
$= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$. 利用 2.47 題(b)。

2.49 證明 $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})+\mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A})+\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = 0$.

解 由 2.47 題(a)，

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$
$$\mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})-\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$$

$$\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{A})$$

相加後即得證。

2.50 證明 $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{D}) - \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{D}) - \mathbf{D}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C})$。

圖 由2.47題(a)，$\mathbf{X}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = \mathbf{C}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{D}) - \mathbf{D}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{C})$ 令 $\mathbf{X}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$；則

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) &= \mathbf{C}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - \mathbf{D}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\\ &= \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{D}) - \mathbf{D}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C})\end{aligned}$$

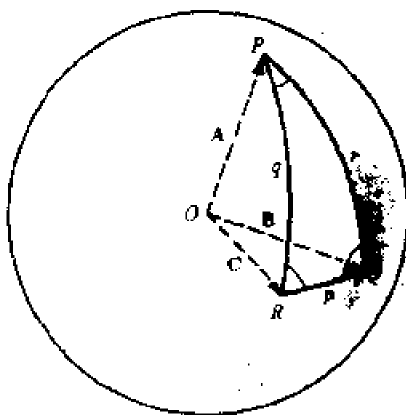
由2.47題(b)，$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{Y} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{Y}) - \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{Y})$ 令 $\mathbf{Y} = \mathbf{C}\times\mathbf{D}$；則

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{D}) - \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{D})$$

2.51 令PQR爲一球面三角形，其各邊p，q，r爲大圓之弧。試證

$$\frac{\sin P}{\sin p} = \frac{\sin Q}{\sin q} = \frac{\sin R}{\sin r}$$

答 假設此球爲單位球（見圖），且令$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$分別爲由球心O畫向P，Q，R的單位向量。由2.50題，



(1) $$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{A}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C})\mathbf{A}$$

$\mathbf{A}$爲垂直於$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$及$\mathbf{A}\times\mathbf{C}$的一個單位向量，所以(1)變爲

(2) $$(\sin r\ \sin q\ \sin P)\mathbf{A} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C})\mathbf{A}$$ 或

(3) $$\sin r\ \sin q\ \sin P = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$$

將p，q，r，P，Q，R及$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$依序排列可得

$$\sin p\ \sin r\ \sin Q = \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{A}$$
$$\sin q\ \sin p\ \sin R = \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}\times\mathbf{B}$$

由於(3)，(4)，(5)的右邊相等（由2.40題），所以

$$\sin r \sin q \sin P = \sin p \sin r \sin Q = \sin q \sin p \sin R$$

由此可得

$$\frac{\sin P}{\sin p} = \frac{\sin Q}{\sin q} = \frac{\sin R}{\sin r}$$

此式稱為球面三角的**正弦定律**。

2.52　證明 $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C})^2$.

解　由2.47題(a)，$\mathbf{X}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{A}) - \mathbf{A}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{C})$　令 $\mathbf{X}=\mathbf{B}\times\mathbf{C}$；則

$$\begin{aligned}(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) &= \mathbf{C}(\mathbf{B}\times\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}) - \mathbf{A}(\mathbf{B}\times\mathbf{C}\cdot\mathbf{C})\\ &= \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{C}) = \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C})\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) &= (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C})\\ &= (\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C})^2\end{aligned}$$

2.53　給定向量 $\mathbf{a}' = \dfrac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}$, $\mathbf{b}' = \dfrac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}$　$\mathbf{c}' = \dfrac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}$，試證若 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}\neq 0$,

(*a*) $\mathbf{a}'\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}'\cdot\mathbf{b} = \mathbf{c}'\cdot\mathbf{c} = 1$,

(*b*) $\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}'\cdot\mathbf{c} = 0$,　$\mathbf{b}'\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}'\cdot\mathbf{c} = 0$,　$\mathbf{c}'\cdot\mathbf{a} = \mathbf{c}'\cdot\mathbf{b} = 0$,

(*c*) 若 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c} = V$　則　$\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'\times\mathbf{c}' = 1/V$,

(*d*) 若 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$ 不共面，則 $\mathbf{a}'$，$\mathbf{b}'$，$\mathbf{c}'$ 也不共面。

解　(*a*) $\mathbf{a}'\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}' = \mathbf{a}\cdot\dfrac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = 1$

$$\mathbf{b}'\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}' = \mathbf{b}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = 1$$

$$\mathbf{c}'\cdot\mathbf{c} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}' = \mathbf{c}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = 1$$

(*b*) $\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}' = \mathbf{b}\cdot\dfrac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = \dfrac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = \dfrac{\mathbf{b}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = 0$

同理亦可證得其他二式。這個結果也可以用觀察法得到，例如，$\mathbf{a}'$ 的方向與 $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ 相同，所以它當然必須與 $\mathbf{b}$ 及 $\mathbf{c}$ 垂直，因此 $\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}=0$，$\mathbf{a}'\cdot\mathbf{c}=0$。

由(a)和(b)我們可以看出向量集 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$ 和 $\mathbf{a}'$，$\mathbf{b}'$，$\mathbf{c}'$ 互為倒數集。也可參閱2.104及2.106題。

(c)　$\mathbf{a}' = \dfrac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{V}$,　$\mathbf{b}' = \dfrac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{V}$,　$\mathbf{c}' = \dfrac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{V}$

則

$$\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'\times\mathbf{c}' = \frac{(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{V^3} = \frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})}{V^3}$$

$$= \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c})^2}{V^3} = \frac{V^2}{V^3} = \frac{1}{V}$$ 利用 2.52 題。

(d) 由 2.43 題，若 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$ 不共面，則 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}\neq 0$。再由(c)可得 $\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'\neq 0$，所以 $\mathbf{a}'$，$\mathbf{b}'$，$\mathbf{c}'$ 也不共面。

2.54 證明任一向量 $\mathbf{r}$ 均可用 2.53 題的倒數向量表示成

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}')\mathbf{a} + (\mathbf{r}\cdot\mathbf{b}')\mathbf{b} + (\mathbf{r}\cdot\mathbf{c}')\mathbf{c}.$$

解 由 2.50 題，

$$\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{D}) - \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{D}) - \mathbf{D}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

則

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{D})}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}} - \frac{\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{D})}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}} + \frac{\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{D})}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}}$$

令 $\mathbf{A}=\mathbf{a}$，$\mathbf{B}=\mathbf{b}$，$\mathbf{C}=\mathbf{c}$，$\mathbf{D}=\mathbf{r}$，則

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\mathbf{a} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\mathbf{b} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\mathbf{c}$$

$$= \mathbf{r}\cdot\left(\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\right)\mathbf{a} + \mathbf{r}\cdot\left(\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\right)\mathbf{b} + \mathbf{r}\cdot\left(\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\right)\mathbf{c}$$

$$= (\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}')\mathbf{a} + (\mathbf{r}\cdot\mathbf{b}')\mathbf{b} + (\mathbf{r}\cdot\mathbf{c}')\mathbf{c}$$

補充題

2.55 求：(a) $\mathbf{k}\cdot(\mathbf{i}+\mathbf{j})$, (b) $(\mathbf{i}-2\mathbf{k})\cdot(\mathbf{j}+3\mathbf{k})$, (c) $(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k})\cdot(3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})$.

答 (a) 0 (b) −6 (c) 1

2.56 若 $\mathbf{A}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$，$\mathbf{B}=4\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$，求：

(a) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, (b) A, (c) B, (d) $|3\mathbf{A}+2\mathbf{B}|$, (e) $(2\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-2\mathbf{B})$.

答 (a) −10 (b) $\sqrt{14}$ (c) 6 (d) $\sqrt{150}$ (e) −14

2.57 求兩向量之夾角：(a) $\mathbf{A}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-6\mathbf{k}$，$\mathbf{B}=4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$, (b) $\mathbf{C}=4\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$，$\mathbf{D}=3\mathbf{i}-6\mathbf{j}-2\mathbf{k}$.

答 (a) 90° (b) $\arccos 8/21 = 67^\circ 36'$

2.58 若 $\mathbf{A}=a\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 與 $\mathbf{B}=2a\mathbf{i}+a\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ 垂直，求 a。

答 $a=2$，-1。

2.59 求連接點 (1，−3，2) 與 (3，−5，1) 的直線與座標軸所成的銳角。

答 $\arccos 2/3$, $\arccos 2/3$, $\arccos 1/3$ 或 $48^\circ 12'$, $48^\circ 12'$, $70^\circ 32'$

2.60 求連接點 (3, 2, −4) 與 (1, −1, 2) 之直線的方向餘弦。

答 2/7, 3/7, −6/7 或 −2/7, −3/7, 6/7

2.61 一三角形的兩邊由向量 $\mathbf{A}=3\mathbf{i}+6\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ 及 $\mathbf{B}=4\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ 所組成，求此三角形的三個角。

答 $\arccos 7/\sqrt{75}$, $\arccos \sqrt{26}/\sqrt{75}$, 90° 或 $36^\circ 4'$, $53^\circ 56'$, 90°

2.62 一平行四邊形的兩對角線爲 $\mathbf{A}=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}-\mathbf{k}$ 及 $\mathbf{B}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-6\mathbf{k}$，證明此平行四邊形爲一菱形，並求其邊長及角度。

答 $5\sqrt{3}/2$, $\arccos 23/75$, $180^\circ-\arccos 23/75$ 或 4.33, $72^\circ 8'$, $107^\circ 52'$

2.63 求向量 $2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ 在向量 $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ 上的投影。

答 8/3

2.64 求向量 $4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 在通過點 (2, 3, −1) 及 (−2, −4, 3) 之直線上的投影。

答 1

2.65 若 $\mathbf{A}=4\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$，$\mathbf{B}=-2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$，求一個同時與 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 垂直的單位向量。

答 $\pm(\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k})/3$

2.66 求一正立方體兩對角線所夾的銳角。

答 $\arccos 1/3$ 或 $70^\circ 32'$

2.67 求一個平行於 xy 平面且與向量 $4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 垂直的單位向量。

答 $\pm(3\mathbf{i}+4\mathbf{j})/5$

2.68 證明 $\mathbf{A}=(2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})/3$, $\mathbf{B}=(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})/3$，$\mathbf{C}=(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k})/3$ 爲兩兩相互垂直的單位向量。

2.69 求在力場 $\mathbf{F}=4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ 作用下，一物由 (3, 2, −1) 沿直線移動至 (2, −1, 4) 所作之功。

答 15

2.70 令 $\mathbf{F}$ 爲一固定向量力場，證明在此力場中將一物體繞任一封閉多邊形移動，所作的功爲零。

2.71 證明半圓的內接角爲直角。

2.72 令 $ABCD$ 爲一平行四邊形，證明 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$。

2.73 令 $ABCD$ 爲任意四邊形，P 與 Q 爲其對角線的中點，證明

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\overline{PQ}^2$$

此爲上題的一般化。

2.74 (a) 求與某一給定向量 $\mathbf{A}$ 垂直，且與原點之距離爲 p 的平面方程式。

(b) 將(a)求出之方程式用直角座標表出。

答 (a) $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=p$，其中 $\mathbf{n}=\mathbf{A}/A$；(b) $A_1x+A_2y+A_3z=Ap$

2.75 令 $\mathbf{r}_1$，$\mathbf{r}_2$ 爲 xy 平面上的單位向量，且分別與正 x 軸成 α 及 β 角。

(a) 證明 $\mathbf{r}_1=\cos\alpha\,\mathbf{i}+\sin\alpha\,\mathbf{j}$，$\mathbf{r}_2=\cos\beta\,\mathbf{i}+\sin\beta\,\mathbf{j}$.

(b) 利用 $\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2$，證明下列三角公式。

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,\quad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

2.76 令 $\mathbf{a}$ 爲定點 (x_1, y_1, z_1) 的位置向量，而 $\mathbf{r}$ 爲任一點 (x, y, z) 的位置向量。若 (a) $|\mathbf{r}-\mathbf{a}|=3$，(b) $(\mathbf{r}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{a}=0$，(c) $(\mathbf{r}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{r}=0$，試描敍 $\mathbf{r}$ 的軌跡。

答 (a) 球，球心在 (x_1, y_1, z_1)，半徑爲 3。

(b) 與 $\mathbf{a}$ 垂直，且通過 $\mathbf{a}$ 之終點的平面。

(c) 球心在 $(x_1/2, y_1/2, z_1/2)$，半徑爲 $\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$ 的球，即一個以 $\mathbf{a}$ 爲直徑的球。

2.77 若 $\mathbf{A}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ 及 $\mathbf{B}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ 分別爲 P，Q 的位置向量。

(a) 求通過 Q 且與直線 PQ 垂直的平面方程式。

(b) 點 $(-1, 1, 1)$ 至此平面的距離是多少？

答 (a) $(\mathbf{r}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B})=0$ 或 $2x+3y+6z=-28$；(b) 5

2.78 求下列各題：(a) $2\mathbf{j}\times(3\mathbf{i}-4\mathbf{k})$, (b) $(\mathbf{i}+2\mathbf{j})\times\mathbf{k}$, (c) $(2\mathbf{i}-4\mathbf{k})\times(\mathbf{i}+2\mathbf{j})$, (d) $(4\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k})\times(3\mathbf{i}+\mathbf{k})$, (e) $(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})\times(3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k})$.

答 (a) $-8\mathbf{i}-6\mathbf{k}$, (b) $2\mathbf{i}-\mathbf{j}$, (c) $8\mathbf{i}-4\mathbf{j}+4\mathbf{k}$, (d) $\mathbf{i}-10\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, (e) $2\mathbf{i}-11\mathbf{j}-7\mathbf{k}$

2.79 若 $\mathbf{A}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}-2\mathbf{k}$，$\mathbf{B}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$，求：

(a) $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$, (b) $(\mathbf{A}+2\mathbf{B})\times(2\mathbf{A}-\mathbf{B})$, (c) $|(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times(\mathbf{A}-\mathbf{B})|$.

答 (a) $\sqrt{195}$, (b) $-25\mathbf{i}+35\mathbf{j}-55\mathbf{k}$, (c) $2\sqrt{195}$

2.80 若 $\mathbf{A}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$，$\mathbf{B}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$，$\mathbf{C}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$，求：

(a) $|(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}|$, (c) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$, (e) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$
(b) $|\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})|$, (d) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$, (f) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$

答 (a) $5\sqrt{26}$, (b) $3\sqrt{10}$, (c) -20, (d) -20, (e) $-40\mathbf{i}-20\mathbf{j}+20\mathbf{k}$, (f) $35\mathbf{i}-35\mathbf{j}+35\mathbf{k}$

2.81 證明若 $\mathbf{A}\neq 0$，且條件(a) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ 與(b) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{A}\times\mathbf{C}$ 均成立，則 $\mathbf{B}=\mathbf{C}$。但是如果(a)、(b)條件中有一個不成立，則必 $\mathbf{B}\neq\mathbf{C}$。

2.82 求對角線爲 $\mathbf{A}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ 及 $\mathbf{B}=\mathbf{i}-3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ 的平行四邊形的面積。

答 $5\sqrt{3}$

2.83 求有三頂點爲 $(3, -1, 2)$，$(1, -1, -3)$ 及 $(4, -3, 1)$ 的三角形的面積。

答 $\frac{1}{2}\sqrt{165}$

2.84 若 $\mathbf{A}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$，$\mathbf{B}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$，求一個大小爲 5，且同時與 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 垂直的向量。

答 $\pm\frac{5\sqrt{3}}{3}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$

2.85 利用2.75題導出下列公式：

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,\quad \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

2.86 若一力 $\mathbf{F}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ 作用在點(1,−1,2)，求F對點(2,−1,3)的力矩。
答 $2\mathbf{i}-7\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

2.87 若一旋轉剛體對一軸旋轉的角速度爲 $\boldsymbol{\omega}=4\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$，求此旋轉體上相關於旋轉軸上一點之位置向量爲 $2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 之點P的線速度。
答 $-5\mathbf{i}-8\mathbf{j}-14\mathbf{k}$

2.88 化簡 $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})\times(\mathbf{C}+\mathbf{A})$.
答 $2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$

2.89 證明 $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix}\mathbf{A}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{A}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{A}\cdot\mathbf{c}\\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{B}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{B}\cdot\mathbf{c}\\ \mathbf{C}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{C}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{C}\cdot\mathbf{c}\end{vmatrix}$

2.90 若一平行六面體的各邊爲 $\mathbf{A}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$, $\mathbf{B}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{C}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$，求體積。
答 7

2.91 若 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=0$，證明下列各條件之一成立：(a) $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$共面，但任二向量不共線，或(b) $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$中有兩個向量共線，或(c)向量 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$共線。

2.92 求一常數a，使得向量 $2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$，$\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$，$3\mathbf{i}+a\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ 共面。
答 $a=-4$

2.93 若 $\mathbf{A}=x_1\mathbf{a}+y_1\mathbf{b}+z_1\mathbf{c}$, $\mathbf{B}=x_2\mathbf{a}+y_2\mathbf{b}+z_2\mathbf{c}$, $\mathbf{C}=x_3\mathbf{a}+y_3\mathbf{b}+z_3\mathbf{c}$ 證明

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

2.94 證明 $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ 的充要條件爲 $(\mathbf{A}\times\mathbf{C})\times\mathbf{B}=\mathbf{0}$，討論當 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$ 或 $\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}=0$ 的情況。

2.95 令點P，Q，R 相對於原點O的位置向量爲 $\mathbf{r}_1=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2=\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_3=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$。求$P$至平面$OQR$的距離。
答 3

2.96 求點(6,−4,4)至連接點(2,1,2)與(3,−1,4)之直線的最短距離。
答 3

2.97　給定點 $P(2,1,3)$，$Q(1,2,1)$，$R(-1,-2,-2)$，$S(1,-4,0)$。求直線 PQ 與直線 RS 的最短距離。

答　$3\sqrt{2}$

2.98　證明三角形各頂點至對邊的垂線交於一點（此點稱爲三角形的垂心（orthocenter））。

2.99　證明三角形各邊的中垂線交於一點（此點稱爲三角形的外心（circumcenter））。

2.100　證明 $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) + (\mathbf{B}\times\mathbf{C})\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{D}) + (\mathbf{C}\times\mathbf{A})\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{D}) = 0$.

2.101　令 PQR 爲一球面三角形，其各邊 p，q，r 爲大圓之弧。證明球面三角的餘弦定律:

$$\cos p = \cos q\cos r + \sin q\sin r\cos P$$

對 $\cos q$ 及 $\cos r$ 的類似公式亦可將字母適當更改得到。
［提示：將恒等式 $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})$ 兩邊加以解釋。］

2.102　求向量　$-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ 的倒數向量集。

答　$\frac{2}{3}\mathbf{i}+\frac{1}{3}\mathbf{k}$，$-\frac{8}{3}\mathbf{i}+\mathbf{j}-\frac{7}{3}\mathbf{k}$，$-\frac{7}{3}\mathbf{i}+\mathbf{j}-\frac{5}{3}\mathbf{k}$

2.103　若 $\mathbf{a}'=\dfrac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}$，$\mathbf{b}'=\dfrac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}$，$\mathbf{c}'=\dfrac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}$，證明

$$\mathbf{a}=\frac{\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'}{\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'},\quad \mathbf{b}=\frac{\mathbf{c}'\times\mathbf{a}'}{\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'},\quad \mathbf{c}=\frac{\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'}{\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'}$$

2.104　若 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$ 及 $\mathbf{a}'$，$\mathbf{b}'$，$\mathbf{c}'$ 滿足

$$\mathbf{a}'\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}'\cdot\mathbf{b} = \mathbf{c}'\cdot\mathbf{c} = 1$$
$$\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}'\cdot\mathbf{c} = \mathbf{b}'\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}'\cdot\mathbf{c} = \mathbf{c}'\cdot\mathbf{a} = \mathbf{c}'\cdot\mathbf{b} = 0$$

證明

$$\mathbf{a}'=\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}},\quad \mathbf{b}'=\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}},\quad \mathbf{c}'=\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}$$

2.105　證明單位向量 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$ 爲唯一的右旋自倒數集。

2.106　證明對給定的不共面向量 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$，恰有一組倒數向量集。

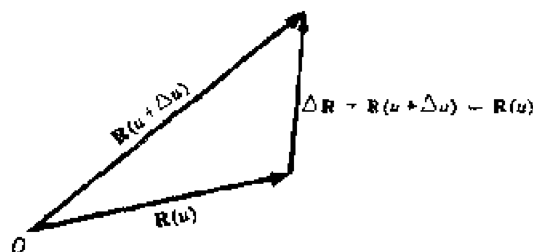
第 三 章

向 量 微 分

3.1 向量的常導數

令 $\mathbf{R}(u)$ 為由一純量變數 u 決定的向量，則

$$\frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta u} = \frac{\mathbf{R}(u+\Delta u)-\mathbf{R}(u)}{\Delta u}$$



其中 Δu 代表 u 的增量。（參閱右圖）

向量 $\mathbf{R}(u)$ 對於純量 u 的常導數為（若極限存在）

$$\frac{d\mathbf{R}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\mathbf{R}(u+\Delta u)-\mathbf{R}(u)}{\Delta u}$$

由於 $\dfrac{d\mathbf{R}}{du}$ 本身也是一個由 u 決定的向量，我們也可以考慮它對 u 的導數。如果此導數存在，我們記作 $\dfrac{d^2\mathbf{R}}{du^2}$，對更高階的導數也是同樣的處理。

3.2 空間曲線

如果 $\mathbf{R}(u)$ 為連接一座標系中之原點 O 至任一點 (x, y, z) 的位置向量 $\mathbf{r}(u)$，則

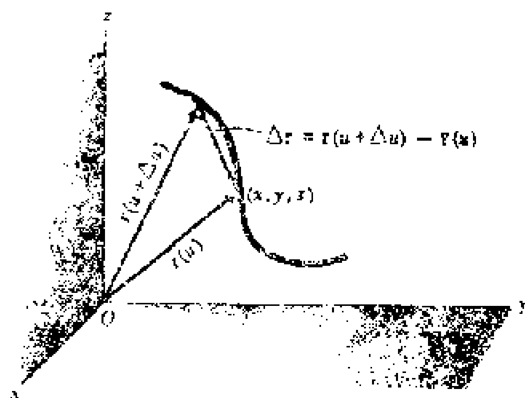
$$\mathbf{r}(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}$$

而向量函數 $\mathbf{r}(u)$ 的描述將 x, y, z 定義成 u 的函數。

當 u 改變時，$\mathbf{r}$ 的終點描述了一個參數方程式為

$$x = x(u),\quad y = y(u),\quad z = z(u)$$

的空間曲線（space curve）。而 $\dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta u} = \dfrac{\mathbf{r}(u+\Delta u)-\mathbf{r}(u)}{\Delta u}$ 則為在 $\Delta\mathbf{r}$ 方向的一個向量（參考下圖）。若 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta u} = \dfrac{d\mathbf{r}}{du}$ 存在，此極限將是一個與空間曲線在 (x, y, z) 相切的



向量，且其可表示成

$$\frac{d\mathbf{r}}{du} = \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} + \frac{dz}{du}\mathbf{k}$$

若 u 爲時間 t ，$\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 代表 $\mathbf{r}$ 之終點所描述之曲線的速度 $\mathbf{v}$ 。同理，$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ 代表沿此曲線的加速度 。

3.3 連續性與可微性

一個純量函數 $\phi(u)$ ，若 $\lim_{\Delta u\to 0}\phi(u+\Delta u)=\phi(u)$，則稱此函數在 u 連續（continuous）。也可以說，若對任一正數 ϵ ，我們可以找到某一正數 δ ，使得每當 $|\Delta u|<\delta$ 時，

$$|\phi(u+\Delta u)-\phi(u)| < \epsilon$$

則稱 $\phi(u)$ 在 u 連續。

一個向量函數 $\mathbf{R}(u)=R_1(u)\mathbf{i}+R_2(u)\mathbf{j}+R_3(u)\mathbf{k}$ ，若三個純量函數 $R_1(u)$，$R_2(u)$ 及 $R_3(u)$ 都在 u 連續，或若 $\lim_{\Delta u\to 0}\mathbf{R}(u+\Delta u)=\mathbf{R}(u)$ ，則稱此向量函數在 u 連續。也可以說，若對任一正數 ϵ ，我們可以找到某一正數 δ ，使得每當 $|\Delta u|<\delta$ 時，

$$|\mathbf{R}(u+\Delta u)-\mathbf{R}(u)| < \epsilon$$

則稱 $\mathbf{R}(u)$ 在 u 連續。

一個 u 的純量函數或向量函數，如果它的 n 階導數存在，則稱此函數爲 n 次可微（differential of order n）。一個可微函數一定是連續函數，反之則不然 。除非特別說明，我們假設本書所提到的函數在所討論的過程中都有足夠的可微次數

3-4 微分公式

若 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ 爲一純量 u 的可微向量函數， ϕ 爲 u 的可微純量函數，則

1. $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \dfrac{d\mathbf{A}}{du} + \dfrac{d\mathbf{B}}{du}$

2. $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\dfrac{d\mathbf{B}}{du} + \dfrac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}$

3. $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times\dfrac{d\mathbf{B}}{du} + \dfrac{d\mathbf{A}}{du}\times\mathbf{B}$

4. $\dfrac{d}{du}(\phi\mathbf{A}) = \phi\dfrac{d\mathbf{A}}{du} + \dfrac{d\phi}{du}\mathbf{A}$

5. $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\dfrac{d\mathbf{C}}{du} + \mathbf{A}\cdot\dfrac{d\mathbf{B}}{du}\times\mathbf{C} + \dfrac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$

6. $\dfrac{d}{du}\{\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\} = \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\dfrac{d\mathbf{C}}{du}) + \mathbf{A}\times(\dfrac{d\mathbf{B}}{du}\times\mathbf{C}) + \dfrac{d\mathbf{A}}{du}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$

在上面的公式中，乘積的順序很重要。

3-5 向量的偏微分

若 $\mathbf{A}$ 爲一個由多個純量變數（例如 x , y , z ）所決定的向量函數，則我們可將 $\mathbf{A}$ 寫成 $\mathbf{A}=\mathbf{A}(x,y,z)$ 。 $\mathbf{A}$ 對於 x 的偏微分定義爲（若極限存在）

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{A}(x+\Delta x,y,z)-\mathbf{A}(x,y,z)}{\Delta x}$$

同理，

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\mathbf{A}(x,y+\Delta y,z)-\mathbf{A}(x,y,z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\mathbf{A}(x,y,z+\Delta z)-\mathbf{A}(x,y,z)}{\Delta z}$$

分別爲 $\mathbf{A}$ 對 y 及 z 的偏微分。

對單變數函數之連續及可微的敍述可推廣至多變數函數。例如，若 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\phi(x+\Delta x,y+\Delta y)=\phi(x,y)$ ，或若對任一正數 ϵ ，我們可找到一個正數 δ ，使得每當 $|\Delta x|<\delta$ 且 $|\Delta y|<\delta$ 時， $|\phi(x+\Delta x,y+\Delta y)-\phi(x,y)|<\epsilon$ ，則我們說 $\phi(x,y)$ 在 (x,y) 連續。對向量函數亦有相似的定義。

對多變數函數，我們用可微來表示此函數有連續一階偏導數。

更高階的導數可以依照微積分中的定義。因此，

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^3 \mathbf{A}}{\partial x\,\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2}\right)$$

若 $\mathbf{A}$ 至少有二階連續偏導數，則 $\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y\,\partial x}$，即微分的順序不重要。

向量函數的偏微分法則與基本微積分中純量函數的微分法則相似，例如，若 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 爲 x，y，z 的函數，則

1. $\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\cdot\mathbf{B}$

2. $\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\times\mathbf{B}$

3. $$\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\right\} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\mathbf{A}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\cdot\mathbf{B}\right\}$$
$$= \mathbf{A}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y\,\partial x}\cdot\mathbf{B},$$ 等等

3-6 向量的微分

向量的微分與基本微積分所遵循的微分法則相似，例如

1. 若 $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$，則 $d\mathbf{A} = dA_1\mathbf{i} + dA_2\mathbf{j} + dA_3\mathbf{k}$

2. $d(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot d\mathbf{B} + d\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

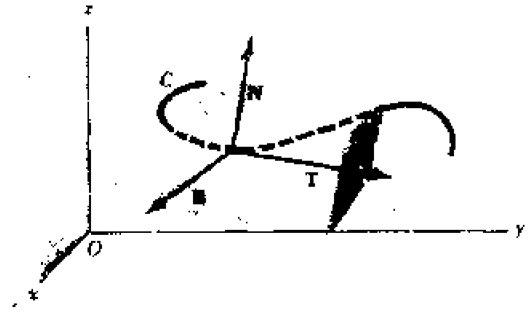
3. $d(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times d\mathbf{B} + d\mathbf{A}\times\mathbf{B}$

4. 若 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x,y,z)$，則 $d\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}dz$，等等

3-7 微分幾何

微分幾何包含了空間曲線及曲面的研究，若 C 爲由函數 $\mathbf{r}(u)$ 所定義的空間曲線，則我們已說過 $\frac{d\mathbf{r}}{du}$ 爲一個在 C 之切線方向的向量。如果純量變數 u 設定爲由 C 上一固定點所測定的弧長 s，則 $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ 爲 C 的一個單位切向量，記作 $\mathbf{T}$（見下圖）。$\mathbf{T}$ 相對

於 s 的變率稱爲 C 的曲率（curvature）度量，記作 $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ 。$\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ 在 C 上任一點的方向爲 C 在此點的法線方向。若 $\mathbf{N}$ 爲此法線方向的一個單位向量，則稱其爲此曲線的主法線（principal normal）。若 $\frac{d\mathbf{T}}{ds}=\kappa\mathbf{N}$，則稱 κ 爲 C 在此特定點的曲率（curvature）。而 $\rho=\frac{1}{\kappa}$ 則稱爲曲率半徑（radius of curvature）。



若一個單位向量 $\mathbf{B}$ 與 $\mathbf{T}$，$\mathbf{N}$ 所在的平面垂直，且 $\mathbf{B}=\mathbf{T}\times\mathbf{N}$，則稱 $\mathbf{B}$ 爲曲線的從法線（binormal）。因此，在 C 的任一特定點上，$\mathbf{T}$，$\mathbf{N}$，$\mathbf{B}$ 形成了一個局部的右旋直角座標系。此座標系稱爲在此點的三面形（trihedral）或三角組（triad）。當 s 改變時，這個座標系也跟著移動，就是所謂的活動三面形（moving trihedral）。

包含基本向量 $\mathbf{T}$，$\mathbf{N}$，$\mathbf{B}$ 之導數的一些關係式，合稱爲Frenet-Serret 公式，這些關係式包括：

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds}=\kappa\mathbf{N},\quad \frac{d\mathbf{N}}{ds}=\tau\mathbf{B}-\kappa\mathbf{T},\quad \frac{d\mathbf{B}}{ds}=-\tau\mathbf{N}$$

其中 τ 爲一個純量，稱爲撓率（torsion），而 $\sigma=1/\tau$ 稱爲撓率半徑（radius of torsion）。

一個曲線在一點 P 的密切平面（osculating plane）就是包含曲線在 P 點之切線及主法線的平面。而法平面（normal plane）則是通過 P 且與切線垂直的平面。通過 P 且與主法線垂直的平面稱爲從切面（rectifying plane）。

3.8 力 學

在力學中通常會研究質點沿一曲線的運動，即所謂的運動學（kinematics）。在這方面，微分幾何的一些結果十分有價值。

對於在一運動物體上之力的研究屬於動力學的範圍。此研究的基礎爲著名的牛頓定律：若在一質量 m 速度爲 $\mathbf{v}$ 之運動物體上的淨力爲 $\mathbf{F}$，則

$$\mathbf{F}=\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

其中 $m\mathbf{v}$ 爲此物的動量。若 m 爲一常數，則此式變爲 $\mathbf{F}=m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=m\mathbf{a}$，其中 $\mathbf{a}$ 爲物體的

加速度。

習題與解答

3.1 若 $\mathbf{R}(u)=x(u)\mathbf{i}+y(u)\mathbf{j}+z(u)\mathbf{k}$，其中 x，y，z 均為純量 u 的可微函數，證明 $\frac{d\mathbf{R}}{du}=\frac{dx}{du}\mathbf{i}+\frac{dy}{du}\mathbf{j}+\frac{dz}{du}\mathbf{k}$.

解

$$\frac{d\mathbf{R}}{du}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\mathbf{R}(u+\Delta u)-\mathbf{R}(u)}{\Delta u}$$

$$=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{[x(u+\Delta u)\mathbf{i}+y(u+\Delta u)\mathbf{j}+z(u+\Delta u)\mathbf{k}]-[x(u)\mathbf{i}+y(u)\mathbf{j}+z(u)\mathbf{k}]}{\Delta u}$$

$$=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{x(u+\Delta u)-x(u)}{\Delta u}\mathbf{i}+\frac{y(u+\Delta u)-y(u)}{\Delta u}\mathbf{j}+\frac{z(u+\Delta u)-z(u)}{\Delta u}\mathbf{k}$$

$$=\frac{dx}{du}\mathbf{i}+\frac{dy}{du}\mathbf{j}+\frac{dz}{du}\mathbf{k}$$

3.2 若 $\mathbf{R}=\sin t\,\mathbf{i}+\cos t\,\mathbf{j}+t\mathbf{k}$，求 (a) $\frac{d\mathbf{R}}{dt}$，(b) $\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$，(c) $\left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|$，(d) $\left|\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}\right|$.

解 (a) $\frac{d\mathbf{R}}{dt}=\frac{d}{dt}(\sin t)\mathbf{i}+\frac{d}{dt}(\cos t)\mathbf{j}+\frac{d}{dt}(t)\mathbf{k}=\cos t\,\mathbf{i}-\sin t\,\mathbf{j}+\mathbf{k}$

(b) $\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)=\frac{d}{dt}(\cos t)\mathbf{i}-\frac{d}{dt}(\sin t)\mathbf{j}+\frac{d}{dt}(1)\mathbf{k}=-\sin t\,\mathbf{i}-\cos t\,\mathbf{j}$

(c) $\left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|=\sqrt{(\cos t)^2+(-\sin t)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$

(d) $\left|\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}\right|=\sqrt{(-\sin t)^2+(-\cos t)^2}=1$

3.3 一質點沿一曲線運動，其參數方程式為 $x=e^{-t}$, $y=2\cos 3t$, $z=2\sin 3t$, 其中 t 為時間。

(a) 試求此質點在時間 t 的速度及加速度。

(b) 求在 $t=0$ 時的速度及加速度大小。

解 (a) 此質點的位置向量 $\mathbf{r}$ 為 $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}=e^{-t}\mathbf{i}+2\cos 3t\,\mathbf{j}+2\sin 3t\,\mathbf{k}$.

所以速度

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=-e^{-t}\mathbf{i}-6\sin 3t\,\mathbf{j}+6\cos 3t\,\mathbf{k}$$

加速度

$$\mathbf{a}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=e^{-t}\mathbf{i}-18\cos 3t\,\mathbf{j}-18\sin 3t\,\mathbf{k}$$

(b) 當 $t=0$, $\frac{d\mathbf{r}}{dt}=-\mathbf{i}+6\mathbf{k}$, $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{i}-18\mathbf{j}$ 因此

在 $t=0$，速度的大小爲 $\sqrt{(-1)^2+(6)^2}=\sqrt{37}$

在 $t=0$，加速度的大小爲 $\sqrt{(1)^2+(-18)^2}=\sqrt{325}$.

3.4 一質點沿曲線 $x=2t^2$，$y=t^2-4t$，$z=3t-5$ 運動，其中 t 爲時間。試求其在 $t=1$ 的速度及加速度在方向 $\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ 的分量。

解

$$\text{速度}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\left[2t^2\mathbf{i}+(t^2-4t)\mathbf{j}+(3t-5)\mathbf{k}\right]$$
$$=4t\mathbf{i}+(2t-4)\mathbf{j}+3\mathbf{k}=4\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k} \quad \text{在 } t=1.$$

在方向 $\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ 的單位向量爲

$$\frac{\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{\sqrt{(1)^2+(-3)^2+(2)^2}}=\frac{\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{\sqrt{14}}.$$

所以速度在所給方向的分量是

$$\frac{(4\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k})}{\sqrt{14}}=\frac{(4)(1)+(-2)(-3)+(3)(2)}{\sqrt{14}}=\frac{16}{\sqrt{14}}=\frac{8\sqrt{14}}{7}$$

$$\text{加速度}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left[4t\mathbf{i}+(2t-4)\mathbf{j}+3\mathbf{k}\right]=4\mathbf{i}+2\mathbf{j}+0\mathbf{k}.$$

加速度在所給方向的分量是

$$\frac{(4\mathbf{i}+2\mathbf{j}+0\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k})}{\sqrt{14}}=\frac{(4)(1)+(2)(-3)+(0)(2)}{\sqrt{14}}=\frac{-2}{\sqrt{14}}=\frac{-\sqrt{14}}{7}$$

3.5 一曲線 C 的參數方程式爲 $x=x(s)$，$y=y(s)$，$z=z(s)$，其中 s 爲由 C 上某一定點所測量之弧長。若 $\mathbf{r}$ 爲 C 上任一點的位置向量，證明 $d\mathbf{r}/ds$ 爲與 C 相切的一個單位向量。

解 向量 $\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\frac{d}{ds}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})=\frac{dx}{ds}\mathbf{i}+\frac{dy}{ds}\mathbf{j}+\frac{dz}{ds}\mathbf{k}$ 是一個與曲線 $x=x(s)$，$y=y(s)$，$z=z(s)$ 相切的向量。要證明它爲單位長，我們可注意

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right|=\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2}=\sqrt{\frac{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}{(ds)^2}}=1$$

因爲由微積分可知

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$$

3.6 (a) 求曲線 $x=t^2+1$，$y=4t-3$，$z=2t^2-6t$ 上任一點的單位切向量。

(b) 求在 $t=2$ 之點的單位切向量。

解 (a) 在曲線上任一點的切向量爲

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(t^2+1)\mathbf{i} + (4t-3)\mathbf{j} + (2t^2-6t)\mathbf{k}\right] = 2t\,\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + (4t-6)\mathbf{k}$$

此向量的大小爲

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{(2t)^2+(4)^2+(4t-6)^2}.$$

所以所要求的單位向量

$$\mathbf{T} = \frac{2t\,\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + (4t-6)\mathbf{k}}{\sqrt{(2t)^2+(4)^2+(4t-6)^2}}$$

注意由於

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt}\text{ ，所以 } \mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}.$$

(b) 在 $t=2$，單位切向量

$$\mathbf{T} = \frac{4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{(4)^2+(4)^2+(2)^2}} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}.$$

3.7 若 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 爲一純量 u 的可微函數，證明

(a) $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\dfrac{d\mathbf{B}}{du} + \dfrac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}$, (b) $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times\dfrac{d\mathbf{B}}{du} + \dfrac{d\mathbf{A}}{du}\times\mathbf{B}$

解 (a)
$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{(\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A})\cdot(\mathbf{B}+\Delta\mathbf{B}) - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\Delta u}$$

$$= \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{B} + \Delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \Delta\mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{B}}{\Delta u}$$

$$= \lim_{\Delta u\to 0}\mathbf{A}\cdot\frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta u} + \frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta u}\cdot\mathbf{B} + \frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta u}\cdot\Delta\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}$$

另解 令 $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$. 則

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \frac{d}{du}(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)$$

$$= \left(A_1\frac{dB_1}{du} + A_2\frac{dB_2}{du} + A_3\frac{dB_3}{du}\right) + \left(\frac{dA_1}{du}B_1 + \frac{dA_2}{du}B_2 + \frac{dA_3}{du}B_3\right)$$

$$= \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}$$

(b) $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{(\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A})\times(\mathbf{B}+\Delta\mathbf{B}) - \mathbf{A}\times\mathbf{B}}{\Delta u}$

$= \lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\mathbf{A}\times\Delta\mathbf{B} + \Delta\mathbf{A}\times\mathbf{B} + \Delta\mathbf{A}\times\Delta\mathbf{B}}{\Delta u}$

$= \lim\limits_{\Delta u\to 0} \mathbf{A}\times\dfrac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta u} + \dfrac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta u}\times\mathbf{B} + \dfrac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta u}\times\Delta\mathbf{B} = \mathbf{A}\times\dfrac{d\mathbf{B}}{du} + \dfrac{d\mathbf{A}}{du}\times\mathbf{B}$

另解

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \frac{d}{du}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

利用行列式的微分定理可得

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ \dfrac{dB_1}{du} & \dfrac{dB_2}{du} & \dfrac{dB_3}{du} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{dA_1}{du} & \dfrac{dA_2}{du} & \dfrac{dA_3}{du} \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\times\mathbf{B}$$

3.8 若 $\mathbf{A} = 5t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} - t^3\mathbf{k}$ ，$\mathbf{B} = \sin t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j}$，求 (a) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$, (b) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$, (c) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})$.

圝 (a) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\dfrac{d\mathbf{B}}{dt} + \dfrac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{B}$

$= (5t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} - t^3\mathbf{k})\cdot(\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}) + (10t\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3t^2\mathbf{k})\cdot(\sin t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j})$

$= 5t^2\cos t + t\sin t + 10t\sin t - \cos t = (5t^2 - 1)\cos t + 11t\sin t$

另解 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 5t^2\sin t - t\cos t$ 則

$\dfrac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \dfrac{d}{dt}(5t^2\sin t - t\cos t) = 5t^2\cos t + 10t\sin t + t\sin t - \cos t$

$= (5t^2 - 1)\cos t + 11t\sin t$

(b) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times\dfrac{d\mathbf{B}}{dt} + \dfrac{d\mathbf{A}}{dt}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5t^2 & t & -t^3 \\ \cos t & \sin t & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 10t & 1 & -3t^2 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix}$

$= [t^3\sin t\,\mathbf{i} - t^3\cos t\,\mathbf{j} + (5t^2\sin t - t\cos t)\mathbf{k}]$

$\quad + [-3t^2\cos t\,\mathbf{i} - 3t^2\sin t\,\mathbf{j} + (-10t\cos t - \sin t)\mathbf{k}]$

$= (t^3\sin t - 3t^2\cos t)\mathbf{i} - (t^3\cos t + 3t^2\sin t)\mathbf{j} + (5t^2\sin t - \sin t - 11t\cos t)\mathbf{k}$

另解

$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5t^2 & t & -t^3 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix} = -t^3\cos t\,\mathbf{i} - t^3\sin t\,\mathbf{j} + (-5t^2\cos t - t\sin t)\mathbf{k}$

則 $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (t^3\sin t - 3t^2\cos t)\mathbf{i} - (t^3\cos t + 3t^2\sin t)\mathbf{j}$

$\quad + (5t^2\sin t - 11t\cos t - \sin t)\mathbf{k}$

(c) $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{A} = 2\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt}$

$$= 2(5t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} - t^3\mathbf{k})\cdot(10t\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3t^2\mathbf{k}) = 100t^3 + 2t + 6t^5$$

另解

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = (5t^2)^2 + (t)^2 + (-t^3)^2 = 25t^4 + t^2 + t^6$$

則

$$\frac{d}{dt}(25t^4 + t^2 + t^6) = 100t^3 + 2t + 6t^5.$$

3.9 若A的大小固定，證明若 $|d\mathbf{A}/dt|\neq 0$，則A與 $d\mathbf{A}/dt$ 垂直。

解 由於A的大小固定，所以 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=$ 常數。則

則 $$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{A} = 2\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0.$$

因此，$\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt}=0$，若 $|\frac{d\mathbf{A}}{dt}|\neq 0$，則A與 $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ 垂直。

3.10 若A，B，C為一純量 u 的可微函數，證明

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{C}}{du} + \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du}\times\mathbf{C} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C},$$

解 由 3.7 (a)題及 3.7 (b)題，

$$\frac{d}{du}\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\frac{d}{du}(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$$
$$= \mathbf{A}\cdot\left[\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{C}}{du} + \frac{d\mathbf{B}}{du}\times\mathbf{C}\right] + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$$
$$= \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{C}}{du} + \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du}\times\mathbf{C} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$$

3.11 計算 $\frac{d}{dt}(\mathbf{V}\cdot\frac{d\mathbf{V}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{V}}{dt^2})$.

解 由3.10題，

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{V}\cdot\frac{d\mathbf{V}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{V}}{dt^2}) = \mathbf{V}\cdot\frac{d\mathbf{V}}{dt}\times\frac{d^3\mathbf{V}}{dt^3} + \mathbf{V}\cdot\frac{d^2\mathbf{V}}{dt^2}\times\frac{d^2\mathbf{V}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{V}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{V}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{V}}{dt^2}$$
$$= \mathbf{V}\cdot\frac{d\mathbf{V}}{dt}\times\frac{d^3\mathbf{V}}{dt^3} + 0 + 0 = \mathbf{V}\cdot\frac{d\mathbf{V}}{dt}\times\frac{d^3\mathbf{V}}{dt^3}$$

3.12 一移動質點的位置向量為 $\mathbf{r}=\cos\omega t\,\mathbf{i}+\sin\omega t\,\mathbf{j}$，其中 ω 為一常數。證明(a)質點的速度 $\mathbf{v}$ 與 $\mathbf{r}$ 垂直，(b)加速度 $\mathbf{a}$ 直接指向原點，且其大小與它至原點的

距離成正比，(c) $\mathbf{r}\times\mathbf{v}$＝常向量。

解 (a) $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\omega\sin\omega t\,\mathbf{i} + \omega\cos\omega t\,\mathbf{j}$

則

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = [\cos\omega t\,\mathbf{i} + \sin\omega t\,\mathbf{j}]\cdot[-\omega\sin\omega t\,\mathbf{i} + \omega\cos\omega t\,\mathbf{j}]$$
$$= (\cos\omega t)(-\omega\sin\omega t) + (\sin\omega t)(\omega\cos\omega t) = 0$$

因此，$\mathbf{r}$ 與 $\mathbf{v}$ 垂直。

(b) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\omega^2\cos\omega t\,\mathbf{i} - \omega^2\sin\omega t\,\mathbf{j} = -\omega^2[\cos\omega t\,\mathbf{i} + \sin\omega t\,\mathbf{j}] = -\omega^2\mathbf{r}$

因此加速度 $\mathbf{a}$ 的方向與 $\mathbf{r}$ 相反，即直接指向原點。它的大小與 $|\mathbf{r}|$ 成正比，也就是與至原點的距離成正比。

(c) $\mathbf{r}\times\mathbf{v} = [\cos\omega t\,\mathbf{i} + \sin\omega t\,\mathbf{j}]\times[-\omega\sin\omega t\,\mathbf{i} + \omega\cos\omega t\,\mathbf{j}]$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t & 0 \end{vmatrix} = \omega(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t)\mathbf{k} = \omega\mathbf{k}$$，爲一常向量。

在物理上，這就是一個質點繞著一圓周所做的圓周運動。其加速度直接向著圓心，爲一**向心加速度**(centripetal acceleration)。

3.13 證明 $\mathbf{A}\times\frac{d^2\mathbf{B}}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}\times\mathbf{B} = \frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt} - \frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\mathbf{B})$.

解 $$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt} - \frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\mathbf{B}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt}) - \frac{d}{dt}(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\mathbf{B})$$
$$= \mathbf{A}\times\frac{d^2\mathbf{B}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt} - \left[\frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}\times\mathbf{B}\right]$$
$$= \mathbf{A}\times\frac{d^2\mathbf{B}}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}\times\mathbf{B}$$

3.14 證明 $\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} = A\frac{dA}{dt}$.

解 令 $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$. 則 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^{-1/2}(2A_1\frac{dA_1}{dt} + 2A_2\frac{dA_2}{dt} + 2A_3\frac{dA_3}{dt})$$
$$= \frac{A_1\frac{dA_1}{dt} + A_2\frac{dA_2}{dt} + A_3\frac{dA_3}{dt}}{(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^{1/2}} = \frac{\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt}}{A},$$ 即 $A\frac{dA}{dt} = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt}$.

另解 由於 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2$, $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) = \frac{d}{dt}(A^2)$.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{A} = 2\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt}$$ 且 $$\frac{d}{dt}(A^2) = 2A\frac{dA}{dt}$$

則

$$2\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 2A\frac{dA}{dt} \quad 或 \quad \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} = A\frac{dA}{dt}\,.$$

注意若$\mathbf{A}$爲一常向量，則由3.9題知$\mathbf{A}\cdot\dfrac{d\mathbf{A}}{dt}=0$。

3.15 若 $\mathbf{A}=(2x^2y-x^4)\mathbf{i}+(e^{xy}-y\sin x)\mathbf{j}+(x^2\cos y)\mathbf{k}$ 求：$\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial x},\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial y},\dfrac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y^2},\dfrac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x\,\partial y},\dfrac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y\,\partial x}$.

解

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y-x^4)\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}-y\sin x)\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial x}(x^2\cos y)\mathbf{k}$$
$$= (4xy-4x^3)\mathbf{i}+(ye^{xy}-y\cos x)\mathbf{j}+2x\cos y\,\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y-x^4)\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}(e^{xy}-y\sin x)\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial y}(x^2\cos y)\mathbf{k}$$
$$= 2x^2\,\mathbf{i}+(xe^{xy}-\sin x)\mathbf{j}-x^2\sin y\,\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(4xy-4x^3)\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial x}(ye^{xy}-y\cos x)\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial x}(2x\cos y)\mathbf{k}$$
$$= (4y-12x^2)\mathbf{i}+(y^2e^{xy}+y\sin x)\mathbf{j}+2\cos y\,\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2)\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}(xe^{xy}-\sin x)\mathbf{j}-\frac{\partial}{\partial y}(x^2\sin y)\mathbf{k}$$
$$= 0+x^2e^{xy}\,\mathbf{j}-x^2\cos y\,\mathbf{k} = x^2e^{xy}\,\mathbf{j}-x^2\cos y\,\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2)\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy}-\sin x)\mathbf{j}-\frac{\partial}{\partial x}(x^2\sin y)\mathbf{k}$$
$$= 4x\,\mathbf{i}+(xye^{xy}+e^{xy}-\cos x)\mathbf{j}-2x\sin y\,\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(4xy-4x^3)\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy}-y\cos x)\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial y}(2x\cos y)\mathbf{k}$$
$$= 4x\,\mathbf{i}+(xye^{xy}+e^{xy}-\cos x)\mathbf{j}-2x\sin y\,\mathbf{k}$$

注意 $\dfrac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y\,\partial x}=\dfrac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x\,\partial y}$，即微分的順序並不重要，這在$\mathbf{A}$有連續二階偏導數時恒爲眞。

3.16 若 $\phi(x,y,z)=xy^2z$ 且 $\mathbf{A}=xz\,\mathbf{i}-xy^2\,\mathbf{j}+yz^2\mathbf{k}$，求 $\dfrac{\partial^3}{\partial x^2\partial z}(\phi\mathbf{A})$ 在點（2，−1，1）之值。

解

$$\phi\mathbf{A} = (xy^2z)(xz\,\mathbf{i}-xy^2\,\mathbf{j}+yz^2\,\mathbf{k}) = x^2y^2z^2\,\mathbf{i}-x^2y^4z\,\mathbf{j}+xy^3z^3\,\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\phi\mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial z}(x^2y^2z^2\,\mathbf{i}-x^2y^4z\,\mathbf{j}+xy^3z^3\,\mathbf{k}) = 2x^2y^2z\,\mathbf{i}-x^2y^4\,\mathbf{j}+3xy^3z^2\,\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}(\phi\mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y^2z\,\mathbf{i} - x^2y^4\,\mathbf{j} + 3xy^3z^2\,\mathbf{k}) = 4xy^2z\,\mathbf{i} - 2xy^4\,\mathbf{j} + 3y^3z^2\,\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial z}(\phi\mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial x}(4xy^2z\,\mathbf{i} - 2xy^4\,\mathbf{j} + 3y^3z^2\,\mathbf{k}) = 4y^2z\,\mathbf{i} - 2y^4\,\mathbf{j}$$

若 $x=2$，$y=-1$，$z=1$ 則 $4(-1)^2(1)\mathbf{i} - 2(-1)^4\mathbf{j} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

3.17 若 $\mathbf{F}$ 由 x, y, z, t 決定，而 x, y, z 由 t 決定，證明在適當的可微假設下，

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

解 假設 $\mathbf{F} = F_1(x,y,z,t)\mathbf{i} + F_2(x,y,z,t)\mathbf{j} + F_3(x,y,z,t)\mathbf{k}$ 則

$$\begin{aligned}
d\mathbf{F} &= dF_1\,\mathbf{i} + dF_2\,\mathbf{j} + dF_3\,\mathbf{k} \\
&= \left[\frac{\partial F_1}{\partial t}dt + \frac{\partial F_1}{\partial x}dx + \frac{\partial F_1}{\partial y}dy + \frac{\partial F_1}{\partial z}dz\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial F_2}{\partial t}dt + \frac{\partial F_2}{\partial x}dx + \frac{\partial F_2}{\partial y}dy + \frac{\partial F_2}{\partial z}dz\right]\mathbf{j} \\
&\quad + \left[\frac{\partial F_3}{\partial t}dt + \frac{\partial F_3}{\partial x}dx + \frac{\partial F_3}{\partial y}dy + \frac{\partial F_3}{\partial z}dz\right]\mathbf{k} \\
&= \left(\frac{\partial F_1}{\partial t}\mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial t}\mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial t}\mathbf{k}\right)dt + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial x}\mathbf{k}\right)dx \\
&\quad + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial y}\mathbf{k}\right)dy + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\mathbf{k}\right)dz \\
&= \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t}dt + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x}dx + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial y}dy + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial z}dz
\end{aligned}$$

所以

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

微分幾何

3.18 證明Frenet-Serret 公式：(*a*) $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$, (*b*) $\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}$, (*c*) $\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau\mathbf{B} - \kappa\mathbf{T}$.

解 (a) 由於 $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}=1$，所以由 3.9 題可得 $\mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{T}}{ds}=0$；即 $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ 與 $\mathbf{T}$ 垂直。

若 $\mathbf{N}$ 爲在 $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ 方向的單位向量，則 $\frac{d\mathbf{T}}{ds}=\kappa\mathbf{N}$。我們稱 $\mathbf{N}$ 爲主法線，κ 爲曲率，而 $\rho=1/\kappa$ 爲曲率半徑。

(b) 令 $\mathbf{B}=\mathbf{T}\times\mathbf{N}$，所以 $\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \mathbf{T}\times\frac{d\mathbf{N}}{ds} + \frac{d\mathbf{T}}{ds}\times\mathbf{N} = \mathbf{T}\times\frac{d\mathbf{N}}{ds} + \kappa\mathbf{N}\times\mathbf{N} = \mathbf{T}\times\frac{d\mathbf{N}}{ds}$。

則 $\mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{T}\times\frac{d\mathbf{N}}{ds} = 0$，所以 $\mathbf{T}$ 與 $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$ 垂直。

但是由$\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}=1$可知$\mathbf{B}\cdot\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}=0$（3.9題），所以$\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}$與$\mathbf{B}$垂直，因此$\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}$在$\mathbf{T}$與$\mathbf{N}$的平面上。

由於$\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}$在$\mathbf{T}$與$\mathbf{N}$的平面上且與$\mathbf{T}$垂直，所以它一定與$\mathbf{N}$平行，則$\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}=-\tau\mathbf{N}$。我們稱$\mathbf{B}$爲從法線，$\tau$爲撓率，而$\sigma=1/\tau$爲撓率半徑。

(c) 由於$\mathbf{T},\mathbf{N},\mathbf{B}$形成一個右旋系，所以$\mathbf{N},\mathbf{T},\mathbf{B}$也是一個右旋系，即$\mathbf{N}=\mathbf{B}\times\mathbf{T}$。

則

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds}=\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{T}}{ds}+\frac{d\mathbf{B}}{ds}\times\mathbf{T}=\mathbf{B}\times\kappa\mathbf{N}-\tau\mathbf{N}\times\mathbf{T}=-\kappa\mathbf{T}+\tau\mathbf{B}=\tau\mathbf{B}-\kappa\mathbf{T}.$$

3.19 畫出空間曲線$x=3\cos t$，$y=3\sin t$，$z=4t$，並求(a)單位切向量$\mathbf{T}$，(b)主法線$\mathbf{N}$，曲率κ及曲率半徑ρ，(c)從法線$\mathbf{B}$、撓率τ及撓率半徑σ。

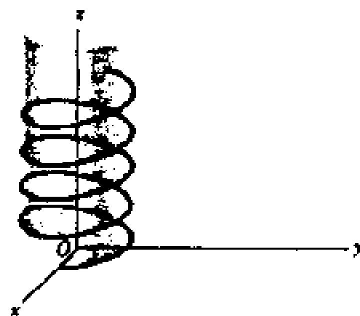


圖 此曲線爲一圓螺線（circular helix），見右圖。由於$t=z/4$，此曲線之方程式爲$x=3\cos(z/4)$，$y=3\sin(z/4)$，所以其位於圓柱$x^2+y^2=9$上。

(a) 此曲線上任一點的位置向量爲

$$\mathbf{r}=3\cos t\,\mathbf{i}+3\sin t\,\mathbf{j}+4t\,\mathbf{k}$$

則
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=-3\sin t\,\mathbf{i}+3\cos t\,\mathbf{j}+4\mathbf{k}$$
$$\frac{ds}{dt}=\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|=\sqrt{\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}}=\sqrt{(-3\sin t)^2+(3\cos t)^2+4^2}=5$$

因此

$$\mathbf{T}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt}=-\frac{3}{5}\sin t\,\mathbf{i}+\frac{3}{5}\cos t\,\mathbf{j}+\frac{4}{5}\mathbf{k}.$$

(b)
$$\frac{d\mathbf{T}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(-\frac{3}{5}\sin t\,\mathbf{i}+\frac{3}{5}\cos t\,\mathbf{j}+\frac{4}{5}\mathbf{k}\right)=-\frac{3}{5}\cos t\,\mathbf{i}-\frac{3}{5}\sin t\,\mathbf{j}$$
$$\frac{d\mathbf{T}}{ds}=\frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt}=-\frac{3}{25}\cos t\,\mathbf{i}-\frac{3}{25}\sin t\,\mathbf{j}$$

由於

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}, \quad \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = |\kappa||\mathbf{N}| = \kappa \quad 當\ \kappa \geq 0.$$

則

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \sqrt{(-\frac{3}{25}\cos t)^2 + (-\frac{3}{25}\sin t)^2} = \frac{3}{25} \quad 且 \quad \rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{25}{3}.$$

由 $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$，我們可得 $\mathbf{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\mathbf{T}}{ds} = -\cos t\,\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j}$.

$$(c)\ \mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{3}{5}\sin t & \frac{3}{5}\cos t & \frac{4}{5} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \frac{4}{5}\sin t\,\mathbf{i} - \frac{4}{5}\cos t\,\mathbf{j} + \frac{3}{5}\mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{4}{5}\cos t\,\mathbf{i} + \frac{4}{5}\sin t\,\mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}/dt}{ds/dt} = \frac{4}{25}\cos t\,\mathbf{i} + \frac{4}{25}\sin t\,\mathbf{j}$$

$$-\tau\mathbf{N} = -\tau(-\cos t\,\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j}) = \frac{4}{25}\cos t\,\mathbf{i} + \frac{4}{25}\sin t\,\mathbf{j}$$

則 $\tau = \frac{4}{25}$ 且 $\sigma = \frac{1}{\tau} = \frac{25}{4}$

3.20 證明曲線 $x = x(s)$，$y = y(s)$，$z = z(s)$ 的曲率半徑為

$$\rho = \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]^{-1/2}.$$

答 曲線上任一點的位置向量為 $\mathbf{r} = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}$.

則

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}, \quad \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{ds^2}\mathbf{k}.$$

但是

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N} \quad 所以 \quad \kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}$$

而由 $\rho = \frac{1}{\kappa}$ 可得證。

3.21 證明 $\frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\times\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} = \frac{\tau}{\rho^2}$.

答 $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{T}$, $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$, $\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} = \kappa\frac{d\mathbf{N}}{ds} + \frac{d\kappa}{ds}\mathbf{N} = \kappa(\tau\mathbf{B} - \kappa\mathbf{T}) + \frac{d\kappa}{ds}\mathbf{N}$

$$= \kappa\tau\mathbf{B} - \kappa^2\mathbf{T} + \frac{d\kappa}{ds}\mathbf{N}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\times\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} = \mathbf{T}\cdot\kappa\mathbf{N}\times(\kappa\tau\mathbf{B}-\kappa^2\mathbf{T}+\frac{d\kappa}{ds}\mathbf{N})$$

$$= \mathbf{T}\cdot(\kappa^2\tau\mathbf{N}\times\mathbf{B}-\kappa^3\mathbf{N}\times\mathbf{T}+\kappa\frac{d\kappa}{ds}\mathbf{N}\times\mathbf{N}) = \mathbf{T}\cdot(\kappa^2\tau\mathbf{T}+\kappa^3\mathbf{B}) = \kappa^2\tau = \frac{\tau}{\rho^2}$$

其結果可寫成

$$\tau = [(x'')^2+(y'')^2+(z'')^2]^{-1}\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

其中撇號代表對 s 的導數，此處用到3.20題的結果。

3.22 給定空間曲線 $x=t$，$y=t^2$，$z=\frac{2}{3}t^3$，求(a)曲率 κ，(b)撓率 τ。

解 (a) 位置向量爲

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+\frac{2}{3}t^3\mathbf{k}.$$

則

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i}+2t\mathbf{j}+2t^2\mathbf{k}$$

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}} = \sqrt{(1)^2+(2t)^2+(2t^2)^2} = 1+2t^2$$

且

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+2t^2\mathbf{k}}{1+2t^2}.$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{(1+2t^2)(2\mathbf{j}+4t\mathbf{k})-(\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+2t^2\mathbf{k})(4t)}{(1+2t^2)^2} = \frac{-4t\mathbf{i}+(2-4t^2)\mathbf{j}+4t\mathbf{k}}{(1+2t^2)^2}$$

而

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} = \frac{-4t\mathbf{i}+(2-4t^2)\mathbf{j}+4t\mathbf{k}}{(1+2t^2)^3}$$

由於 $\frac{d\mathbf{T}}{ds}=\kappa\mathbf{N}$，因此

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N},\quad \kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{\sqrt{(-4t)^2+(2-4t^2)^2+(4t)^2}}{(1+2t^2)^3} = \frac{2}{(1+2t^2)^2}$$

(b) 由(a)，$\mathbf{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{-2t\mathbf{i}+(1-2t^2)\mathbf{j}+2t\mathbf{k}}{1+2t^2}$

則

$$\mathbf{B}=\mathbf{T}\times\mathbf{N}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{1}{1+2t^2} & \frac{2t}{1+2t^2} & \frac{2t^2}{1+2t^2}\\ \frac{-2t}{1+2t^2} & \frac{1-2t^2}{1+2t^2} & \frac{2t}{1+2t^2}\end{vmatrix}=\frac{2t^2\mathbf{i}-2t\mathbf{j}+\mathbf{k}}{1+2t^2}$$

現在

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt}=\frac{4t\mathbf{i}+(4t^2-2)\mathbf{j}-4t\mathbf{k}}{(1+2t^2)^2}\quad 且\quad \frac{d\mathbf{B}}{ds}=\frac{d\mathbf{B}/dt}{ds/dt}=\frac{4t\mathbf{i}+(4t^2-2)\mathbf{j}-4t\mathbf{k}}{(1+2t^2)^3}$$

同時，

$$-\tau\mathbf{N}=-\tau\left[\frac{-2t\mathbf{i}+(1-2t^2)\mathbf{j}+2t\mathbf{k}}{1+2t^2}\right]$$.由於 $\frac{d\mathbf{B}}{ds}=-\tau\mathbf{N}$，可求出 $\tau=\frac{2}{(1+2t^2)^2}$.

注意在此曲線 $\kappa=\tau$ 。

3.23 求 3.22 題之曲線在點 $t=1$ 的(a)切線，(b)主法線，(c)從法線的向量及直角座標方程式。

解 令 $\mathbf{T}_0$，$\mathbf{N}_0$，$\mathbf{B}_0$ 分別代表在所求之點的切線，主法線及從法線向量。則由 3.22 題，

$$\mathbf{T}_0=\frac{\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{3}\qquad \mathbf{N}_0=\frac{-2\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{3},\qquad \mathbf{B}_0=\frac{2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}}{3}$$

若 $\mathbf{A}$ 代表一已知向量，而 $\mathbf{r}_0$ 與 $\mathbf{r}$ 分別代表 $\mathbf{A}$ 的始點與 $\mathbf{A}$ 上任一點的位置向量，則 $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ 與 $\mathbf{A}$ 平行，所以 $\mathbf{A}$ 的方程式是 $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{A}=\mathbf{0}$ 。則

切線方程式爲 $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{T}_0=\mathbf{0}$
主法線方程式爲 $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{N}_0=\mathbf{0}$
從法線方程式爲 $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{B}_0=\mathbf{0}$

以直角座標表示，$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，$\mathbf{r}_0=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\frac{2}{3}\mathbf{k}$，則各方程式分別變成

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2/3}{2},\quad \frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2/3}{2},\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2/3}{1}.$$

這些方程式也可以寫成參數形式。(參閱 1.28 題)

3.24 求 3.22 題的曲線在 $t=1$ 之點的(a)密切平面，(b)法平面及(c)從切面的向量方程式及直角座標方程式。

解 (a) 密切平面就是包含切線及主法線的平面，若 $\mathbf{r}$ 爲此平面上任一點的位置向量，$\mathbf{r}_0$ 爲在點 $t=1$ 的位置向量，則 $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ 與在點 $t=1$ 的從法線 $\mathbf{B}_0$ 垂直

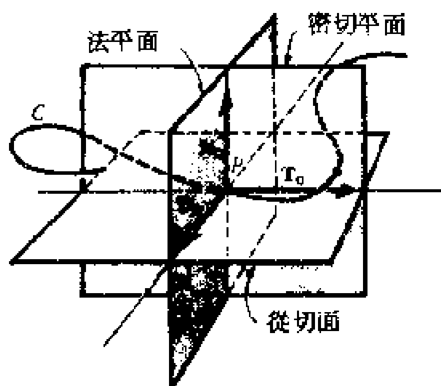
，即 $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{B}_0=0$。

(b) 法平面爲與在 $t=1$ 之點的切線垂直的平面，則其方程式爲 $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{T}_0=0$。

(c) 從切面爲與已知點之主法線垂直的平面，其方程式爲 $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{N}_0=0$。

以直角座標表示，(a)、(b)、(c)的方程式分別變成

$$2(x-1)-2(y-1)+1(z-2/3)=0,$$
$$1(x-1)+2(y-1)+2(z-2/3)=0,$$
$$-2(x-1)-1(y-1)+2(z-2/3)=0.$$



上圖顯示一曲線 C 在點 P 的密切平面，法平面及從切面。

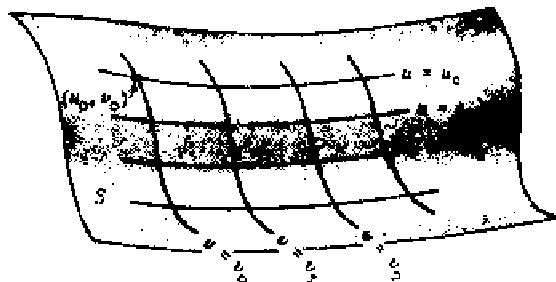
3.25 (a) 證明方程式 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ 代表一曲面。

(b) 證明 $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}$ 代表此曲面的一個法向量。

(c) 試求下列曲面的一個單位法向量，其中 $a>0$：

$$\mathbf{r}=a\cos u\sin v\,\mathbf{i}+a\sin u\sin v\,\mathbf{j}+a\cos v\,\mathbf{k}$$

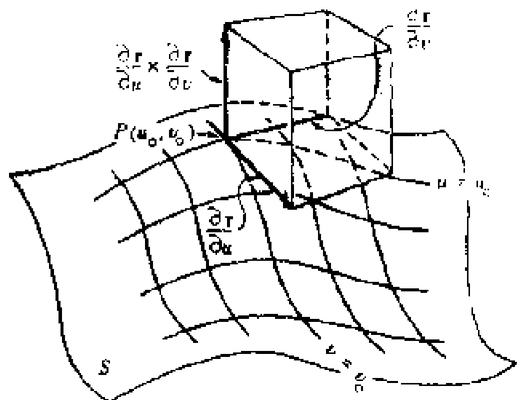
答 (a) 如果我們令 u 爲一固定值 u_0，則 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u_0,v)$ 代表一個曲線，我們可將此曲線記作 $u=u_0$。同理，$u=u_1$ 定義了另一條曲線 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u_1,v)$。所以，當 u 變動時，$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ 代表一個曲線在空間中移動，而產生了一個曲面 S。因此，$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ 代表一個曲面，如下圖所示。



曲線 $u=u_0$，$u=u_1$，…均爲此曲面上的曲線。同樣地，$v=v_0$，$v=v_1$，…也是此曲面上的曲線。

給定 u 和 v 的值後，我們就可以得到曲面上的一個點。例如，曲線 $u=u_0$ 與 $v=v_0$ 相交，定義了曲面上的點 (u_0, v_0)。我們稱此數對 (u, v) 爲曲面上的**曲線座標**（curvilinear coordinate）。如果所有的 $u=$ 常數曲線與 $v=$ 常數曲線都互相垂直，則我們稱此曲線座標系正交。關於曲線座標更進一步的討論，請參閱第 7 章。

(b) 考慮在曲面 S 上座標爲 (u_0, v_0) 之點 P，如右圖所示。在 P 點的向量 $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$，可將 $\mathbf{r}$ 對 u 微分求得（將 $v=v_0$ 視爲常數）。由空間曲線的定理，在 P 上的 $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ 代表曲線 $v=v_0$ 在 P 點的切向量。同理，在 P 點的 $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ 代表曲線 $u=u_0$ 的一個切向量。由於 $\partial \mathbf{r}/\partial u$ 及 $\partial \mathbf{r}/\partial v$ 均代表一個曲面 S 上的曲線在 P 點的切向量，因此這二個向量也在 P 點與 S 相切。所以 $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ 爲 S 在 P 點的一個法向量。



(c) $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = -a\sin u\sin v\,\mathbf{i} + a\cos u\sin v\,\mathbf{j}$

$\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = a\cos u\cos v\,\mathbf{i} + a\sin u\cos v\,\mathbf{j} - a\sin v\,\mathbf{k}$

則

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\sin u\sin v & a\cos u\sin v & 0 \\ a\cos u\cos v & a\sin u\cos v & -a\sin v \end{vmatrix}$$

$$= -a^2\cos u\sin^2 v\,\mathbf{i} - a^2\sin u\sin^2 v\,\mathbf{j} - a^2\sin v\cos v\,\mathbf{k}$$

代表曲面在點 (u, v) 的一個法向量。

將 $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ 除以它的大小 $\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|$ 就可求出單位法向量：

$$\sqrt{a^4\cos^2 u\sin^4 v + a^4\sin^2 u\sin^4 v + a^4\sin^2 v\cos^2 v}$$

$$= \sqrt{a^4(\cos^2 u + \sin^2 u)\sin^4 v + a^4\sin^2 v\cos^2 v}$$

$$= \sqrt{a^4\sin^2 v(\sin^2 v + \cos^2 v)} = \begin{cases} a^2\sin v & \text{若 } \sin v > 0 \\ -a^2\sin v & \text{若 } \sin v < 0 \end{cases}$$

所以有兩個單位法向量

$$\pm(\cos u \sin v\, \mathbf{i} + \sin u \sin v\, \mathbf{j} + \cos v\, \mathbf{k}) = \pm \mathbf{n}$$

我們注意到所給的曲面定義爲 $x = a\cos u \sin v$，$y = a\sin u \sin v$，$z = a\cos v$，由此我們可看出 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$，此爲一半徑 a 之球。由於 $\mathbf{r} = a\mathbf{n}$，因此

$$\mathbf{n} = \cos u \sin v\, \mathbf{i} + \sin u \sin v\, \mathbf{j} + \cos v\, \mathbf{k}$$

爲此球在點 (u, v) 的向外單位法向量。

3.26 求曲面 $z = x^2 + y^2$ 在點 $(1, -1, 2)$ 的切平面方程式。

解 令 $x = u$，$y = v$，$z = u^2 + v^2$ 爲曲面的參數方程式。在曲面上任一點的位置向量爲：

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u^2+v^2)\mathbf{k}$$

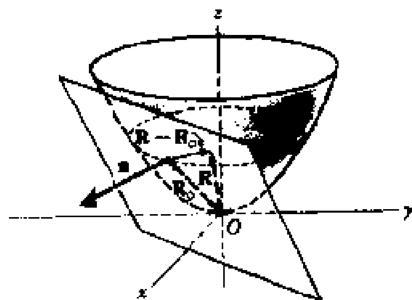
則在點 $(1, -1, 2)$，$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i} + 2u\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$，$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{j} + 2v\mathbf{k} = \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$，其中 $u = 1$，$v = -1$。

利用3.25題，曲面在此點的一個法向量 $\mathbf{n}$ 爲

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{k}) \times (\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

點 $(1, -1, 2)$ 的位置向量是 $\mathbf{R}_0 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$。而在切平面上任一點的位置向量爲

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$



則由右圖，$\mathbf{R} - \mathbf{R}_0$ 與 $\mathbf{n}$ 垂直，因此所要求的切平面方程式爲 $(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)\cdot\mathbf{n} = 0$。或

$$[(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) - (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})]\cdot[-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}] = 0$$

即

$$-2(x-1) + 2(y+1) + (z-2) = 0 \quad 或 \quad 2x - 2y - z = 2.$$

力學

3.27 一質點沿一曲線運動，若其速度爲 $\mathbf{v}$，證明此質點的加速度爲

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{N}$$

其中T爲此曲線的單位切向量，N爲單位主法線，ρ 爲曲率半徑。

圖　　速度 $\mathbf{v}=\mathbf{v}$ 的大小乘上單位切向量T

即

$$\mathbf{v} = v\,\mathbf{T}$$

微分後得

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{T}) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\frac{d\mathbf{T}}{dt}$$

但由3.18(a)題，

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \kappa\mathbf{N}\frac{ds}{dt} = \kappa v\mathbf{N} = \frac{v\mathbf{N}}{\rho}$$

則

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\left(\frac{v\mathbf{N}}{\rho}\right) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{N}$$

由上式顯示，加速度在路徑切線方向的分量爲 dv/dt，而在主法線方向的分量爲 v^2/ρ。後者通常稱爲向心加速度(centripetal acceleration)。3.12題爲此題之一特例。

3.28 若一質量 m 之質點相對於點 O 的位置向量爲 $\mathbf{r}$，且 $\mathbf{F}$ 爲加諸於此質點的外力。則 $\mathbf{r}\times\mathbf{F}=\mathbf{M}$ 爲 $\mathbf{F}$ 對於 O 的轉矩(torque)或力矩(moment)。證明 $\mathbf{M}=d\mathbf{H}/dt$，其中 $\mathbf{H}=\mathbf{r}\times m\mathbf{v}$，$\mathbf{v}$ 爲質點的速度。

圖 $\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = \mathbf{r}\times\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$　(由牛頓定律)

但是

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v}) = \mathbf{r}\times\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) + \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times m\mathbf{v}$$
$$= \mathbf{r}\times\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) + \mathbf{v}\times m\mathbf{v} = \mathbf{r}\times\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) + \mathbf{0}$$

即

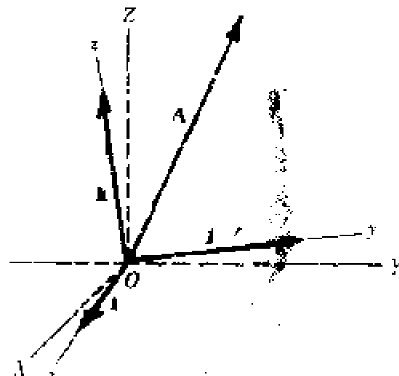
$$\mathbf{M} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{H}}{dt}$$

注意此結果不論 m 是否爲常數均成立。H稱爲角動量(angular momentum)。此結果說明了轉矩等於角動量對時間的變率。

這個結果可以很容易地推廣至 n 個質點，質量分別爲 $m_1, m_2, \cdots m_n$，位置向量分別爲 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_n$，分別受外力 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \cdots, \mathbf{F}_n$ 的系統。此時，

總角動量 $\mathbf{H}=\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k$，總轉矩 $\mathbf{M}=\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k$，其結果仍爲 $\mathbf{M}=\dfrac{d\mathbf{H}}{dt}$。

3.29 一觀察者站在一原點 O 之 xyz 座標系中的一個固定點，如右圖所示，其觀察一向量 $\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$，並計算此向量對時間的導式爲 $\dfrac{dA_1}{dt}\mathbf{i}+\dfrac{dA_2}{dt}\mathbf{j}+\dfrac{dA_3}{dt}\mathbf{k}$。稍後他發現他及他的座標系實際上繞著一個在空間中固定且也是以 O 爲原點的 XYZ 座標系旋轉。他產生一個疑問："如果在 XYZ 座標中一固定點上有一個觀察者，則其所算出 $\mathbf{A}$ 對時間的導式是什麼？"



(a) 若 $\left.\dfrac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_f$ 及 $\left.\dfrac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_m$ 分別代表在固定系統及移動系統中 $\mathbf{A}$ 對時間的導式，證明存在一個向量 $\boldsymbol{\omega}$ 使得

$$\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_f = \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_m + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A}$$

(b) 令 D_f 及 D_m 分別代表在固定系統及移動系統中的時間導式運算子，證明下列運算等價：

$$D_f = D_m + \boldsymbol{\omega}\times$$

解 (a) 對固定的觀察者而言，單位向量 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$ 實際隨時間而改變。因此，此觀察者計算所得 $\mathbf{A}$ 對時間的導式爲

$$(1)\qquad \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_2}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_3}{dt}\mathbf{k} + A_1\frac{d\mathbf{i}}{dt} + A_2\frac{d\mathbf{j}}{dt} + A_3\frac{d\mathbf{k}}{dt}$$ 即

$$(2)\qquad \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_f = \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_m + A_1\frac{d\mathbf{i}}{dt} + A_2\frac{d\mathbf{j}}{dt} + A_3\frac{d\mathbf{k}}{dt}$$

由於 $\mathbf{i}$ 爲一單位向量，$d\mathbf{i}/dt$ 與 $\mathbf{i}$ 垂直（見3.9題），所以 $d\mathbf{i}/dt$ 必落在 $\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$ 所在的平面。則

$$(3)\qquad \frac{d\mathbf{i}}{dt} = \alpha_1\mathbf{j} + \alpha_2\mathbf{k}$$

同理，

$$(4) \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \alpha_3\mathbf{k} + \alpha_4\mathbf{i}$$

$$(5) \qquad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \alpha_5\mathbf{i} + \alpha_6\mathbf{j}$$

由 $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0$，可知 $\mathbf{i}\cdot\dfrac{d\mathbf{j}}{dt}+\dfrac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j}=0$。但由(4)式，$\mathbf{i}\cdot\dfrac{d\mathbf{j}}{dt}=\alpha_4$；由(3)式，$\dfrac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j}=\alpha_1$；所以 $\alpha_4=-\alpha_1$。

同理，由 $\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=0$，$\mathbf{i}\cdot\dfrac{d\mathbf{k}}{dt}+\dfrac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{k}=0$，可得 $\alpha_5=-\alpha_2$；由 $\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0$，$\mathbf{j}\cdot\dfrac{d\mathbf{k}}{dt}+\dfrac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k}=0$，可得 $\alpha_6=-\alpha_3$。則

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \alpha_1\mathbf{j} + \alpha_2\mathbf{k}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \alpha_3\mathbf{k} - \alpha_1\mathbf{i}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\alpha_2\mathbf{i} - \alpha_3\mathbf{j}$$

且

$$A_1\frac{d\mathbf{i}}{dt} + A_2\frac{d\mathbf{j}}{dt} + A_3\frac{d\mathbf{k}}{dt} = (-\alpha_1A_2 - \alpha_2A_3)\mathbf{i} + (\alpha_1A_1 - \alpha_3A_3)\mathbf{j} + (\alpha_2A_1 + \alpha_3A_2)\mathbf{k}$$

此式可寫作

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

如果我們令 $\alpha_3=\omega_1$，$-\alpha_2=\omega_2$，$\alpha_1=\omega_3$，此行列式變爲

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}=\omega_1\mathbf{i}+\omega_2\mathbf{j}+\omega_3\mathbf{k}$。此向量 $\boldsymbol{\omega}$ 爲移動系統相對於固定系統的角速度向量。

(b) 由定義，

$$D_f\mathbf{A} = \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_f = \text{固定系統中的導式}$$

$$D_m\mathbf{A} = \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_m = \text{移動系統中的導式}$$

由(a)

$$D_f\mathbf{A} = D_m\mathbf{A} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A} = (D_m + \boldsymbol{\omega}\times)\mathbf{A}$$

由此顯示 $D_f \equiv D_m + \boldsymbol{\omega}\times$.

3.30 試求由 3.29 題之二觀察者所見一移動質點的(a)速度及(b)加速度。

解 (a) 令3.29題中的向量$\mathbf{A}$為此質點的位置向量$\mathbf{r}$。利用3.29題(b)的運算符號，我們有

(1) $$D_f\mathbf{r} = (D_m + \boldsymbol{\omega}\times)\mathbf{r} = D_m\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

但是 $D_f\mathbf{r} = \mathbf{v}_{p|f}$ ＝質點相對於固定系統的速度

$D_m\mathbf{r} = \mathbf{v}_{p|m}$ ＝質點相對於移動系統的速度

$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} = \mathbf{v}_{m|f}$ ＝移動系統相對於固定系統的速度

所以(1)式可以寫成

(2) $$\mathbf{v}_{p|f} = \mathbf{v}_{p|m} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

或

(3) $$\mathbf{v}_{p|f} = \mathbf{v}_{p|m} + \mathbf{v}_{m|f}$$

注意在此題中當然我們可以把固定系統與移動系統中之觀察者的角色互換。因此，固定的觀察者可以將其本身想成相對於另一觀察者其在移動。此時，我們必須把下標m與f互換，並把$\boldsymbol{\omega}$變成$-\boldsymbol{\omega}$，因為相對的旋轉方向變成相反了。若如此，則(2)變成

$$\mathbf{v}_{p|m} = \mathbf{v}_{p|f} - \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \quad 或 \quad \mathbf{v}_{p|f} = \mathbf{v}_{p|m} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

所以對任一觀察者，此結果均為正確。

(b) 對在O的固定觀察者而言，質點的加速度為$D_f^2\mathbf{r} = D_f(D_f\mathbf{r})$。在(1)式兩邊同時取$D_f$，利用3.29(b)中的等價運算，可得

$$\begin{aligned}D_f(D_f\mathbf{r}) &= D_f(D_m\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \\ &= (D_m + \boldsymbol{\omega}\times)(D_m\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \\ &= D_m(D_m\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega}\times(D_m\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \\ &= D_m^2\mathbf{r} + D_m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega}\times D_m\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\end{aligned}$$

或 $$D_f^2\mathbf{r} = D_m^2\mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega}\times D_m\mathbf{r} + (D_m\boldsymbol{\omega})\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$

令

$\mathbf{a}_{p|f} = D_f^2\mathbf{r}$ ＝質點相對於固定系統的加速度

$\mathbf{a}_{p|m} = D_m^2\mathbf{r}$ ＝質點相對於移動系統的加速度

則

$$\mathbf{a}_{m|f} = 2\boldsymbol{\omega}\times D_m\mathbf{r} + (D_m\boldsymbol{\omega})\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$

＝移動系統相對於固定系統的加速度

並且我們可以寫出

$$\mathbf{a}_{p|f} = \mathbf{a}_{p|m} + \mathbf{a}_{m|f}.$$

對許多情況，ω為一個常數向量，即此旋轉為一等角速度運動。則 $D_m\omega=0$ 且

$$\mathbf{a}_{m|f} = 2\boldsymbol{\omega}\times D_m\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_m + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$

$2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_m$ 稱為Coriolis *加速度*，而$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$ 稱為*向心加速度*（centripetal acceleration）。

牛頓定律只有在慣性系統（inertial system）中正確，即只有在固定系統，或相對於一固定系統以等速度運動的系統中成立。而地球事實上並不是一個慣性系統，所以我們必須考慮這些額外的力。如果一質點的質量固定為M，則牛頓第二定律變為

$$(4) \qquad M D_m^2\mathbf{r} = \mathbf{F} - 2M(\boldsymbol{\omega}\times D_m\mathbf{r}) - M[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})]$$

其中D_m 代表一個在地球上的觀察者所用以計算的d/dt，而 $\mathbf{F}$代表此觀察者所測得之所有外力的合力。在(4)式右邊的最後兩項在許多應用中都忽略不計。

愛因斯坦的相對論對由牛頓所提出的絕對運動觀念作了根本的修訂，並且導致牛頓定律的修正。

補充題

3.31 若 $\mathbf{R}=e^{-t}\mathbf{i}+\ln(t^2+1)\mathbf{j}-\tan t\,\mathbf{k}$，求在$t=0$之(a) $\frac{d\mathbf{R}}{dt}$，(b) $\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$，(c) $\left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|$，(d) $\left|\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}\right|$

答 (a) $-\mathbf{i}-\mathbf{k}$, (b) $\mathbf{i}+2\mathbf{j}$, (c) $\sqrt{2}$, (d) $\sqrt{5}$

3.32 若一質點沿曲線$x=2\sin 3t$，$y=2\cos 3t$，$z=8t$，$t>0$ 運動，求其速度及加速度，並求出速度及加速度的大小。

答 $\mathbf{v}=6\cos 3t\,\mathbf{i}-6\sin 3t\,\mathbf{j}+8\mathbf{k}$，$\mathbf{a}=-18\sin 3t\,\mathbf{i}-18\cos 3t\,\mathbf{j}$，$|\mathbf{v}|=10$，$|\mathbf{a}|=18$

3.33 求曲線$x=a\cos\omega t$，$y=a\sin\omega t$，$z=bt$ 上任一點的切向量，其中a，b，ω均為常數。

答 $\dfrac{-a\omega\sin\omega t\,\mathbf{i}+a\omega\cos\omega t\,\mathbf{j}+b\mathbf{k}}{\sqrt{a^2\omega^2+b^2}}$

3.34 若 $\mathbf{A}=t^2\mathbf{i}-t\mathbf{j}+(2t+1)\mathbf{k}$ 且 $\mathbf{B}=(2t-3)\mathbf{i}+\mathbf{j}-t\mathbf{k}$，求在$t=1$之

(a) $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$, (b) $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$, (c) $\frac{d}{dt}|\mathbf{A}+\mathbf{B}|$, (d) $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt})$

答 (a) -6，(b) $7\mathbf{j}+3\mathbf{k}$，(c) 1，(d) $\mathbf{i}+6\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

3.35 若$\mathbf{A}=\sin u\,\mathbf{i}+\cos u\,\mathbf{j}+u\mathbf{k}$，$\mathbf{B}=\cos u\,\mathbf{i}-\sin u\,\mathbf{j}-3\mathbf{k}$，且 $\mathbf{C}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$，求在$u=0$之 $\frac{d}{du}(\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}))$。

答 $7\mathbf{i}+6\mathbf{j}-6\mathbf{k}$

3.36 若$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$均爲s的可微函數，求 $\frac{d}{ds}\left(\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{ds}-\frac{d\mathbf{A}}{ds}\cdot\mathbf{B}\right)$。

答 $\mathbf{A}\cdot\frac{d^2\mathbf{B}}{ds^2}-\frac{d^2\mathbf{A}}{ds^2}\cdot\mathbf{B}$

3.37 若$\mathbf{A}(t)=3t^2\mathbf{i}-(t+4)\mathbf{j}+(t^2-2t)\mathbf{k}$，$\mathbf{B}(t)=\sin t\,\mathbf{i}+3e^{-t}\mathbf{j}-3\cos t\,\mathbf{k}$，求在$t=0$之$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$。

答 $-30\mathbf{i}+14\mathbf{j}+20\mathbf{k}$

3.38 若$\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}=6t\mathbf{i}-24t^2\mathbf{j}+4\sin t\,\mathbf{k}$，且在$t=0$之$\mathbf{A}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}$，$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=-\mathbf{i}-3\mathbf{k}$，求$\mathbf{A}$。

答 $\mathbf{A}=(t^3-t+2)\mathbf{i}+(1-2t^4)\mathbf{j}+(t-4\sin t)\mathbf{k}$

3.39 證明$\mathbf{r}=e^{-t}(\mathbf{C}_1\cos 2t+\mathbf{C}_2\sin 2t)$，其中$\mathbf{C}_1$及$\mathbf{C}_2$爲常向量，爲微分方程式$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}+2\frac{d\mathbf{r}}{dt}+5\mathbf{r}=0$之一解。

3.40 若α及ω爲常數，證明微分方程式$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}+2\alpha\frac{d\mathbf{r}}{dt}+\omega^2\mathbf{r}=0$的通解爲

(a) $\mathbf{r}=e^{-\alpha t}(\mathbf{C}_1e^{\sqrt{\alpha^2-\omega^2}\,t}+\mathbf{C}_2e^{-\sqrt{\alpha^2-\omega^2}\,t})$ 若 $\alpha^2-\omega^2>0$.

(b) $\mathbf{r}=e^{-\alpha t}(\mathbf{C}_1\sin\sqrt{\omega^2-\alpha^2}\,t+\mathbf{C}_2\cos\sqrt{\omega^2-\alpha^2}\,t)$ 若 $\alpha^2-\omega^2<0$.

(c) $\mathbf{r}=e^{-\alpha t}(\mathbf{C}_1+\mathbf{C}_2t)$ 若 $\alpha^2-\omega^2=0$.

其中$\mathbf{C}_1$及$\mathbf{C}_2$爲任意常向量。

3.41 解 (a) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}-4\frac{d\mathbf{r}}{dt}-5\mathbf{r}=0$, (b) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}+2\frac{d\mathbf{r}}{dt}+\mathbf{r}=0$, (c) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}+4\mathbf{r}=0$.

答 (a) $\mathbf{r}=\mathbf{C}_1e^{5t}+\mathbf{C}_2e^{-t}$, (b) $\mathbf{r}=e^{-t}(\mathbf{C}_1+\mathbf{C}_2t)$, (c) $\mathbf{r}=\mathbf{C}_1\cos 2t+\mathbf{C}_2\sin 2t$

3.42 解 $\frac{d\mathbf{Y}}{dt}=\mathbf{X}$, $\frac{d\mathbf{X}}{dt}=-\mathbf{Y}$.

答 $\mathbf{X}=\mathbf{C}_1\cos t+\mathbf{C}_2\sin t$, $\mathbf{Y}=\mathbf{C}_1\sin t-\mathbf{C}_2\cos t$

3.43 若 $\mathbf{A}=\cos xy\,\mathbf{i}+(3xy-2x^2)\mathbf{j}-(3x+2y)\mathbf{k}$，求 $\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}$, $\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}$, $\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y\partial x}$.

答 $\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}=-y\sin xy\,\mathbf{i}+(3y-4x)\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, $\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}=-x\sin xy\,\mathbf{i}+3x\mathbf{j}-2\mathbf{k}$,

$\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x^2}=-y^2\cos xy\,\mathbf{i}-4\mathbf{j}$, $\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y^2}=-x^2\cos xy\,\mathbf{i}$, $\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y\partial x}$

$=-(xy\cos xy+\sin xy)\mathbf{i}+3\mathbf{j}$

3.44 若 $\mathbf{A}=x^2yz\,\mathbf{i}-2xz^3\mathbf{j}+xz^2\mathbf{k}$，$\mathbf{B}=2z\mathbf{i}+y\mathbf{j}-x^2\mathbf{k}$，求$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$在$(1,0,-2)$之値。

答 $-4\mathbf{i}-8\mathbf{j}$

3.45 若$\mathbf{C}_1$及$\mathbf{C}_2$爲常向量，λ爲一常數，證明$\mathbf{H}=e^{-\lambda x}(\mathbf{C}_1 \sin \lambda y+\mathbf{C}_2 \cos \lambda y)$ 滿足偏微分方程式 $\dfrac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2}=\mathbf{0}$ 。

3.46 若$\mathbf{P}_0$爲一常向量，ω及c爲常數，$i=\sqrt{-1}$，證明$\mathbf{A}=\dfrac{\mathbf{P}_0 e^{i\omega(t-r/c)}}{r}$ 滿足方程式 $\dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial r}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$ 。此結果在電磁理論中十分重要。

微分幾何

3.47 求空間曲線$x=t-t^3/3$，$y=t^2$，$z=t+t^3/3$的(a)單位切向量$\mathbf{T}$，(b)曲率κ，(c)主法線向量$\mathbf{N}$，(d)從法線向量$\mathbf{B}$及(e)撓率τ。

答 (a) $\mathbf{T}=\dfrac{(1-t^2)\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+(1+t^2)\mathbf{k}}{\sqrt{2}(1+t^2)}$ (c) $\mathbf{N}=-\dfrac{2t}{1+t^2}\mathbf{i}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\mathbf{j}$ (e) $\tau=\dfrac{1}{(1+t^2)^2}$

(b) $\kappa=\dfrac{1}{(1+t^2)^2}$ (d) $\mathbf{B}=\dfrac{(t^2-1)\mathbf{i}-2t\mathbf{j}+(t^2+1)\mathbf{k}}{\sqrt{2}(1+t^2)}$

3.48 一空間曲線以弧長s作爲參數，其定義方程式爲

$$x=\arctan s,\quad y=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ln(s^2+1),\quad z=s-\arctan s$$

求(a) $\mathbf{T}$, (b) $\mathbf{N}$, (c) $\mathbf{B}$, (d) κ, (e) τ, (f) ρ, (g) σ.

答 (a) $\mathbf{T}=\dfrac{\mathbf{i}+\sqrt{2}s\mathbf{j}+s^2\mathbf{k}}{s^2+1}$ (d) $\kappa=\dfrac{\sqrt{2}}{s^2+1}$

(b) $\mathbf{N}=\dfrac{-\sqrt{2}s\mathbf{i}+(1-s^2)\mathbf{j}+\sqrt{2}s\mathbf{k}}{s^2+1}$ (e) $\tau=\dfrac{\sqrt{2}}{s^2+1}$ (g) $\sigma=\dfrac{s^2+1}{\sqrt{2}}$

(c) $\mathbf{B}=\dfrac{s^2\mathbf{i}-\sqrt{2}s\mathbf{j}+\mathbf{k}}{s^2+1}$ (f) $\rho=\dfrac{s^2+1}{\sqrt{2}}$

3.49 求三次撓線(twisted cubic) $x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$的κ及τ。

答 $\kappa=\dfrac{2\sqrt{9t^4+9t^2+1}}{(9t^4+4t^2+1)^{3/2}}$， $\tau=\dfrac{3}{9t^4+9t^2+1}$

3.50 證明平面曲線的撓率$\tau=0$。

3.51 證明平面曲線$y=f(x)$，$z=0$的曲率半徑爲 $\rho=\dfrac{[1+(y')^2]^{3/2}}{|y''|}$.

3.52 求位置向量爲$\mathbf{r}=a\cos u\,\mathbf{i}+b\sin u\,\mathbf{j}$之曲線的曲率及曲率半徑，其中$a$，$b$爲正常數。解釋$a=b$的情形。

答 $\kappa=\dfrac{ab}{(a^2\sin^2 u+b^2\cos^2 u)^{3/2}}=\dfrac{1}{\rho}$；所給之曲線爲一橢圓，若$a=b$，則此曲線

變爲一個半徑 a 的圓，其曲率半徑 $\rho=a$。

3.53 證明Frenet-Serret 公式可以寫成 $\frac{d\mathbf{T}}{ds}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{T}$, $\frac{d\mathbf{N}}{ds}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{N}$, $\frac{d\mathbf{B}}{ds}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{B}$ 的形式，並決定 $\boldsymbol{\omega}$。

答 $\boldsymbol{\omega}=\tau\mathbf{T}+\kappa\mathbf{B}$

3.54 證明空間曲線 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ 的曲率爲 $\kappa=\frac{|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}$，其中點代表對 t 微分。

3.55 (a) 對空間曲線 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$，證明 $\tau=\frac{\dot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}}\times\dddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|^2}$.

(b) 若參數 t 爲弧長 s，證明 $\tau=\frac{\frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\times\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}}{(d^2\mathbf{r}/ds^2)^2}$.

3.56 若 $\mathbf{Q}=\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}$，證明 $\kappa=\frac{Q}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}$, $\tau=\frac{\mathbf{Q}\cdot\dddot{\mathbf{r}}}{Q^2}$.

3.57 求空間曲線 $x=\theta-\sin\theta$, $y=1-\cos\theta$, $z=4\sin(\theta/2)$ 的 κ 及 τ。

答 $\kappa=\frac{1}{8}\sqrt{6-2\cos\theta}$, $\tau=\frac{(3+\cos\theta)\cos\theta/2+2\sin\theta\sin\theta/2}{12\cos\theta-4}$

3.58 求曲線 $x=\frac{2t+1}{t-1}$, $y=\frac{t^2}{t-1}$, $z=t+2$ 的撓率，並解釋你的答案。

答 $\tau=0$，此曲線落在平面 $x-3y+3z=5$ 上。

3.59 證明空間曲線 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ 在 $t=t_0$ 的切線、主法線及從法線方程式分別可寫成 $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{T}_0$，$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{N}_0$，$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{B}_0$，$t$ 爲一參數。

3.60 求曲線 $x=3\cos t$，$y=3\sin t$，$z=4t$ 在點 $t=\pi$ 的(a)切線，(b)主法線及(c)從法線。

答 (a) 切線：$\mathbf{r}=-3\mathbf{i}+4\pi\mathbf{k}+t(-\frac{3}{5}\mathbf{j}+\frac{4}{5}\mathbf{k})$ 或 $x=-3$, $y=-\frac{3}{5}t$, $z=4\pi+\frac{4}{5}t$.

(b) 法線：$\mathbf{r}=-3\mathbf{i}+4\pi\mathbf{j}+t\mathbf{i}$ 或 $x=-3+t$, $y=4\pi$, $z=0$.

(c) 從法線：$\mathbf{r}=-3\mathbf{i}+4\pi\mathbf{j}+t(\frac{4}{5}\mathbf{j}+\frac{3}{5}\mathbf{k})$ 或 $x=-3$, $y=4\pi+\frac{4}{5}t$, $z=\frac{3}{5}t$.

3.61 求曲線 $x=3t-t^3$，$y=3t^2$，$z=3t+t^3$ 在點 $t=1$ 的(a)密切平面，(b)法平面及(c)從切面。

答 (a) $y-z+1=0$, (b) $y+z-7=0$, (c) $x=2$

3.62 (a) 證明曲面 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ 上弧長的微分爲

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$$

其中

$$E=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}=\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)^2,\quad F=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v},\quad G=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}=\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)^2.$$

(b) 證明 u，v 曲線座標系爲正交的充要條件爲 $F=0$。

3.63 求曲面 $z=xy$ 在點 (2，3，6) 的切平面方程式。

答 $3x+2y-z=6$

3.64 求曲面 $4z=x^2-y^2$ 在點 (3，1，2) 的切平面及法線方程式。

答 $3x-y-2z=4$; $x=3t+3$, $y=1-t$, $z=2-2t$

3.65 證明曲面 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ 的單位法向量爲 $\mathbf{n}=\pm\dfrac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}$，其中 E，F 及 G 的定義同 3.62 題。

力學

3.66 一質點沿著曲線 $\mathbf{r}=(t^3-4t)\mathbf{i}+(t^2+4t)\mathbf{j}+(8t^2-3t^3)\mathbf{k}$ 其中 t 爲時間。求此質點在 $t=2$ 之加速度的切線及法線分量大小。

答 切線分量：16；法線分量：$2\sqrt{73}$

3.67 若一質點沿一空間曲線的速度爲 $\mathbf{v}$，加速度爲 $\mathbf{a}$。證明其路徑的曲率半徑爲 $\rho=\dfrac{v^3}{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}$。

3.68 一物體被一力 $\mathbf{F}=f(r)\mathbf{r}$ 吸向一固定點 O，其中 $\mathbf{r}$ 爲此物體相對於 O 的位置向量。證明 $\mathbf{r}\times\mathbf{v}=\mathbf{h}$，其中 $\mathbf{h}$ 爲一常向量。證明角動量爲一常數。

3.69 證明沿一空間曲線移動的質點，其加速度向量一定在密切平面上。

3.70 (a) 用極座標 (ρ,ϕ) 來表示一個在 xy 平面上運動之質點的加速度。

(b) 此加速度平行於 ρ 及垂直於 ρ 的分量各爲何？

答 (a) $\ddot{\mathbf{r}}=[(\ddot{\rho}-\rho\dot{\phi}^2)\cos\phi-(\rho\ddot{\phi}+2\dot{\rho}\dot{\phi})\sin\phi]\mathbf{i}$
$+[(\ddot{\rho}-\rho\dot{\phi}^2)\sin\phi+(\rho\ddot{\phi}+2\dot{\rho}\dot{\phi})\cos\phi]\mathbf{j}$

(b) $\ddot{\rho}-\rho\dot{\phi}^2$, $\rho\ddot{\phi}+2\dot{\rho}\dot{\phi}$

第四章

梯度，散度與旋度

4-1 向量微分運算子，DEL

向量微分運算子DEL，記作 ∇，定義爲

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

此向量運算子具有一般向量類似的性質，在定義我們經常使用的三種量時十分有效。這三種量就是梯度（gradient）、散度（divergence）和旋度（curl）。而此運算子 ∇ 也稱爲 nabla 。

4-2 梯 度

令 $\phi(x, y, z)$ 在空間某一區域中的各點 (x, y, z) 均有定義且可微（即 ϕ 定義了一個可微純量場）。則 ϕ 的梯度（gradient），記作 $\nabla\phi$ 或 grad ϕ，定義爲

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

注意 $\nabla\phi$ 定義了一個向量場。

$\nabla\phi$ 在一個單位向量 $\mathbf{a}$ 之方向的分量爲 $\nabla\phi\cdot\mathbf{a}$，稱爲 ϕ 在方向 $\mathbf{a}$ 的方向導數（directional derivative）。實際上，這就是 ϕ 在點 (x, y, z) 沿方向 $\mathbf{a}$ 的變率。

4-3 散 度

令 $\mathbf{V}(x, y, z) = V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k}$ 在空間某一區域中的各點 (x, y, z) 均有定義且可微（即 $\mathbf{V}$ 定義了一個可微向量場）。則 $\mathbf{V}$ 的散度（divergence），記作 $\nabla\cdot\mathbf{V}$ 或 div $\mathbf{V}$，定義爲

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

注意此式與 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3$ 的相似處。同時注意 $\nabla\cdot\mathbf{V}\neq\mathbf{V}\cdot\nabla$。

4-4 旋 度

若 $\mathbf{V}(x, y, z)$ 爲一可微向量場，則 $\mathbf{V}$ 的旋度（curl）或旋轉（rotation），記作 $\nabla\times\mathbf{V}$ 或 curl $\mathbf{V}$ 或 rot $\mathbf{V}$，定義爲

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\times(V_1\mathbf{i}+V_2\mathbf{j}+V_3\mathbf{k}) \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ V_1 & V_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} \\
&= \left(\frac{\partial V_3}{\partial y}-\frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z}-\frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

注意在行列式展開式中，運算子 $\frac{\partial}{\partial x}$，$\frac{\partial}{\partial y}$，$\frac{\partial}{\partial z}$ 必須放在 V_1, V_2, V_3 前面。

4-5 包含 ∇ 的一些公式

若 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 均爲可微向量函數，且 ϕ 和 ψ 均爲位置 (x, y, z) 的可微純量函數，則

1. $\nabla(\phi+\psi) = \nabla\phi+\nabla\psi$ 或 $\text{grad}(\phi+\psi) = \text{grad}\,\phi+\text{grad}\,\psi$
2. $\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\cdot\mathbf{A}+\nabla\cdot\mathbf{B}$ 或 $\text{div}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \text{div}\,\mathbf{A}+\text{div}\,\mathbf{B}$
3. $\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\times\mathbf{A}+\nabla\times\mathbf{B}$ 或 $\text{curl}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \text{curl}\,\mathbf{A}+\text{curl}\,\mathbf{B}$
4. $\nabla\cdot(\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi)\cdot\mathbf{A}+\phi(\nabla\cdot\mathbf{A})$
5. $\nabla\times(\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi)\times\mathbf{A}+\phi(\nabla\times\mathbf{A})$
6. $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$
7. $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}-\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+\mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})$
8. $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})+\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})$
9. $\nabla\cdot(\nabla\phi) = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

其中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

稱爲拉卜拉士運算子(Laplacian operator)。

10. $\nabla\times(\nabla\phi)=0$，$\phi$之梯度的旋度等於0。

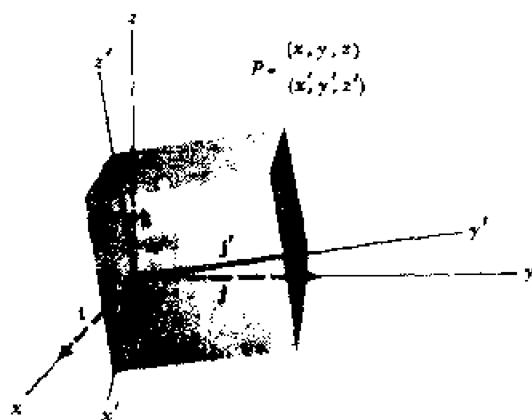
11. $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0$，$\mathbf{A}$之旋度的散度等於0。

12. $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$

在公式9.～12.中，假設ϕ和$\mathbf{A}$均有連續的二階偏導數。

4.6 不變性

考慮兩個直角座標系 xyz 及 $x'y'z'$（參考下圖）有共同的原點O，但各軸相對旋轉了某一角度。



對這兩個座標系，點P的座標分別爲(x, y, z)和(x', y', z')。兩座標間的變換關係式爲

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
x' &= l_{11}x + l_{12}y + l_{13}z\\
y' &= l_{21}x + l_{22}y + l_{23}z\\
z' &= l_{31}x + l_{32}y + l_{33}z
\end{aligned}
$$

其中 l_{jk}，$j, k=1, 2, 3$ 代表 x', y', z' 軸對 x, y, z 軸的方向餘弦（參考4.38題）。如果兩座標系的原點不同，則變換關係式變爲

$$
(2)\qquad
\begin{cases}
x' = l_{11}x + l_{12}y + l_{13}z + a_1'\\
y' = l_{21}x + l_{22}y + l_{23}z + a_2'\\
z' = l_{31}x + l_{32}y + l_{33}z + a_3'
\end{cases}
$$

其中(a_1', a_2', a_3')爲xyz座標系中的原點O相對$x'y'z'$座標系的座標。

變換關係式(1)定義了一個純旋轉(pure rotation)，而關係式(2)則定義了一個旋轉加平移(rotation plus translation)。任一個剛體運動都是一個平移加上一個

旋轉的結果。變換式(1)也稱爲一個正交變換（orthogonal transformation）。而一般的線性變換稱爲一個仿射變換（affine transformation）。

實際上，一個純量點函數或純量場 $\phi(x, y, z)$ 在某一點的值，應該與這個點的座標無關。在某一點的溫度與此點採用座標 (x, y, z) 或 (x', y', z') 無關。因此，如果 $\phi(x, y, z)$ 是座標 (x, y, z) 之點 P 的溫度，而 $\phi'(x', y', z')$ 是座標爲 (x', y', z') 之同一點 P 的溫度，則必然 $\phi(x, y, z)=\phi'(x', y', z')$。如果 $\phi(x, y, z)=\phi'(x', y', z')$，其中 x, y, z 與 x', y', z' 之間的變換關係式爲(1)或(2)，我們稱 $\phi(x, y, z)$ 爲相對於此變換式的不變量（invariant）。例如，$x^2+y^2+z^2$ 是在旋轉變換式(1)下的不變量，因爲 $x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2$。

同理，向量點函數或向量場 $\mathbf{A}(x, y, z)$，若

$$A_1(x,y,z)\mathbf{i} + A_2(x,y,z)\mathbf{j} + A_3(x,y,z)\mathbf{k} = A_1'(x',y',z')\mathbf{i}' + A_2'(x',y',z')\mathbf{j}' + A_3'(x',y',z')\mathbf{k}'$$

即 $\mathbf{A}(x, y, z)=\mathbf{A}'(x', y', z')$，則稱 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 爲一不變量。在第 7 章和第 8 章，我們會考慮更一般的變換，上面的觀念會更推廣。

我們可以證明（4.41 題）一個不變純量場的梯度對於變換(1)和(2)爲一個不變向量場。同樣的，在此變換下，一個不變向量場的散度和旋度也都是不變量。

習題與解答

梯 度

4.1 若 $\phi(x, y, z)=3x^2y-y^3z^2$，求在點 $(1, -2, -1)$ 的 $\nabla\phi$（或 $\mathrm{grad}\,\phi$）。

解

$$\begin{aligned}
\nabla\phi &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(3x^2y - y^3z^2) \\
&= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y - y^3z^2) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y - y^3z^2) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(3x^2y - y^3z^2) \\
&= 6xy\,\mathbf{i} + (3x^2 - 3y^2z^2)\mathbf{j} - 2y^3z\,\mathbf{k} \\
&= 6(1)(-2)\mathbf{i} + \{3(1)^2 - 3(-2)^2(-1)^2\}\mathbf{j} - 2(-2)^3(-1)\mathbf{k} \\
&= -12\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 16\mathbf{k}
\end{aligned}$$

4.2 若 F, G 均爲 x, y, z 的可微純量場，試證 (a) $\nabla(F+G) = \nabla F + \nabla G$，(b) $\nabla(FG) = F\,\nabla G + G\,\nabla F$。

解

$$(a)\ \nabla(F+G) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(F+G)$$

$$= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(F+G) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(F+G) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(F+G)$$

$$= \mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial x} + \mathbf{i}\frac{\partial G}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial y} + \mathbf{j}\frac{\partial G}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial F}{\partial z} + \mathbf{k}\frac{\partial G}{\partial z}$$

$$= \mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial F}{\partial z} + \mathbf{i}\frac{\partial G}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial G}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial G}{\partial z}$$

$$= (\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z})F + (\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z})G = \nabla F + \nabla G$$

(b) $$\nabla(FG) = (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})(FG)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(FG)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(FG)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}(FG)\mathbf{k}$$

$$= (F\frac{\partial G}{\partial x} + G\frac{\partial F}{\partial x})\mathbf{i} + (F\frac{\partial G}{\partial y} + G\frac{\partial F}{\partial y})\mathbf{j} + (F\frac{\partial G}{\partial z} + G\frac{\partial F}{\partial z})\mathbf{k}$$

$$= F(\frac{\partial G}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial G}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial G}{\partial z}\mathbf{k}) + G(\frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{k}) = F\nabla G + G\nabla F$$

4.3 若 (a) $\phi = \ln|\mathbf{r}|$, (b) $\phi = \frac{1}{r}$，求 $\nabla\phi$。

解 (a) $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$， 則 $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 且 $\phi = \ln|\mathbf{r}| = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)$.

$$\nabla\phi = \tfrac{1}{2}\nabla\ln(x^2+y^2+z^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}\{\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\ln(x^2+y^2+z^2) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\ln(x^2+y^2+z^2) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\ln(x^2+y^2+z^2)\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\{\mathbf{i}\frac{2x}{x^2+y^2+z^2} + \mathbf{j}\frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + \mathbf{k}\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\mathbf{r}}{r^2}$$

(b) $$\nabla\phi = \nabla(\frac{1}{r}) = \nabla(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) = \nabla\{(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\}$$

$$= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$$

$$= \mathbf{i}\{-\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2x\} + \mathbf{j}\{-\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2y\} + \mathbf{k}\{-\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2z\}$$

$$= \frac{-x\mathbf{i}-y\mathbf{j}-z\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

4.4 證明 $\nabla r^n = nr^{n-2}\mathbf{r}$.

解 $$\nabla r^n = \nabla(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^n = \nabla(x^2+y^2+z^2)^{n/2}$$

$$= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\{(x^2+y^2+z^2)^{n/2}\} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\{(x^2+y^2+z^2)^{n/2}\} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\{(x^2+y^2+z^2)^{n/2}\}$$

$$= \mathbf{i}\{\tfrac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{n/2-1}2x\} + \mathbf{j}\{\tfrac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{n/2-1}2y\} + \mathbf{k}\{\tfrac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{n/2-1}2z\}$$

$$= n(x^2+y^2+z^2)^{n/2-1}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$$

$$= n(r^2)^{n/2-1}\mathbf{r} = nr^{n-2}\mathbf{r}$$

注意若 $\mathbf{r}=r\,\mathbf{r}_1$，其中 $\mathbf{r}_1$ 爲 $\mathbf{r}$ 方向的單位向量，則 $\nabla r^n = nr^{n-1}\mathbf{r}_1$。

4.5 證明 $\nabla\phi$ 爲一與曲面 $\phi(x,y,z)=c$ 垂直的向量，其中 c 爲一常數。

解 令 $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 爲曲面上任一點 (x,y,z) 的位置向量。則 $d\mathbf{r}=dx\,\mathbf{i}+dy\,\mathbf{j}+dz\,\mathbf{k}$ 落在曲面在 P 點的切平面上。

但是

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = 0 \text{ 或 } \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}) = 0$$

即 $\nabla\phi\cdot d\mathbf{r}=0$。所以 $\nabla\phi$ 與 $d\mathbf{r}$ 垂直，因此 $\nabla\phi$ 與曲面垂直。

4.6 求曲面 $x^2y+2xz=4$ 在點 $(2,-2,3)$ 的單位法向量。

解 在點 $(2,-2,3)$，$\nabla(x^2y+2xz) = (2xy+2z)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 2x\mathbf{k} = -2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+4\mathbf{k}$。則

$$\text{曲面的一個單位法向量} = \frac{-2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+4\mathbf{k}}{\sqrt{(-2)^2+(4)^2+(4)^2}} = -\frac{1}{3}\mathbf{i}+\frac{2}{3}\mathbf{j}+\frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

另一個單位法向量爲 $\frac{1}{3}\mathbf{i}-\frac{2}{3}\mathbf{j}-\frac{2}{3}\mathbf{k}$ 與上面的向量方向相反。

4.7 求曲面 $2xz^2-3xy-4x=7$ 在點 $(1,-1,2)$ 的切平面方程式。

解

$$\nabla(2xz^2-3xy-4x) = (2z^2-3y-4)\mathbf{i} - 3x\mathbf{j} + 4xz\mathbf{k}$$

則曲面在點 $(1,-1,2)$ 的一個法線爲 $7\mathbf{i}-3\mathbf{j}+8\mathbf{k}$。

若一點的位置向量爲 $\mathbf{r}_0$，則通過此點且與法線 $\mathbf{N}$ 垂直的平面方程式爲 $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{N}=0$（參考2.18題）。則所要求的切平面方程式爲

$$[(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})-(\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k})]\cdot(7\mathbf{i}-3\mathbf{j}+8\mathbf{k}) = 0$$

或

$$7(x-1) - 3(y+1) + 8(z-2) = 0.$$

4.8 若 $\phi(x,y,z)$ 及 $\phi(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)$ 爲兩鄰近點 $P(x,y,z)$ 及 $Q(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)$ 的溫度。

(a) 用物理方式解釋 $\dfrac{\Delta\phi}{\Delta s} = \dfrac{\phi(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-\phi(x,y,z)}{\Delta s}$ 所代表的意義，其中 Δs 爲點 P 與點 Q 的距離。

(b) 求 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta\phi}{\Delta s}=\dfrac{d\phi}{ds}$，並說明其物理意義。

(c) 證明 $\dfrac{d\phi}{ds}=\nabla\phi\cdot\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$。

解 (a) 由於 $\Delta\phi$ 為點 P 與點 Q 之間的溫度變化，Δs 為此二點的距離，所以 $\frac{\Delta\phi}{\Delta s}$ 代表由 P 至 Q 每單位距離的溫度的平均變率。

(b) 由微積分，我們知道

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\Delta z + \Delta x \text{、} \Delta y \text{、} \Delta z \text{ 更高次數的無窮多項式}$$

則

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s}$$

或

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

$\frac{d\phi}{ds}$ 代表在 P 點向 Q 的方向，溫度對距離的變率。這也稱為 ϕ 的方向導數(directional derivative)。

(c) $$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{ds} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot\left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}\right)$$

$$= \nabla\phi\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}.$$

注意，由於 $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ 為一單位向量，$\nabla\phi\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ 為 $\nabla\phi$ 在此單位向量方向的分量。

4.9 證明 ϕ 的最大變率（即最大方向導數）發生在向量 $\nabla\phi$ 的方向，並且它的大小就是 $\nabla\phi$ 的大小。

解 由 4.8 (c)題，$\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ 為 $\nabla\phi$ 在方向 $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ 的投影。當 $\nabla\phi$ 與 $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ 同方向時，這個投影量會最大，因此 $\frac{d\phi}{ds}$ 的最大值發生在 $\nabla\phi$ 方向且其大小就等於 $|\nabla\phi|$。

4.10 求 $\phi = x^2yz + 4xz^2$ 在 $(1,-2,-1)$ 對 $2\mathbf{i}-\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ 方向的導數。

解

$$\nabla\phi = \nabla(x^2yz + 4xz^2) = (2xyz + 4z^2)\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + (x^2y + 8xz)\mathbf{k}$$
$$= 8\mathbf{i} - \mathbf{j} - 10\mathbf{k} \quad \text{在} \quad (1,-2,-1).$$

在 $2\mathbf{i}-\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ 方向的單位向量為

$$\mathbf{a} = \frac{2\mathbf{i}-\mathbf{j}-2\mathbf{k}}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(-2)^2}} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$$

則所求之方向導數為

$$\nabla\phi\cdot\mathbf{a} = (8\mathbf{i}-\mathbf{j}-10\mathbf{k})\cdot(\tfrac{2}{3}\mathbf{i}-\tfrac{1}{3}\mathbf{j}-\tfrac{2}{3}\mathbf{k}) = \frac{16}{3}+\frac{1}{3}+\frac{20}{3} = \frac{37}{3}$$

由於此值為正，所以 ϕ 在這個方向遞增。

4.11 (a) 在點 $(2,1,-1)$，$\phi = x^2yz^3$ 對那一個方向的方向導數最大？

(b) 此最大導數的值是多少？

解 在 $(2,1,-1)$，

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \nabla(x^2yz^3) = 2xyz^3\,\mathbf{i} + x^2z^3\,\mathbf{j} + 3x^2yz^2\,\mathbf{k}\\ &= -4\mathbf{i}-4\mathbf{j}+12\mathbf{k}\end{aligned}$$

則由 4.9 題，

(a) 在 $\nabla\phi = -4\mathbf{i}-4\mathbf{j}+12\mathbf{k}$ 方向的方向導數最大。

(b) 最大導數的值為 $|\nabla\phi| = \sqrt{(-4)^2+(-4)^2+(12)^2} = \sqrt{176} = 4\sqrt{11}$。

4.12 求曲面 $x^2+y^2+z^2=9$ 與 $z=x^2+y^2-3$ 在點 $(2,-1,2)$ 的交角。

解 兩曲面在一點的交角就是兩曲面在此點之法線的夾角。

$x^2+y^2+z^2=9$ 在 $(2,-1,2)$ 的一個法線為

$$\nabla\phi_1 = \nabla(x^2+y^2+z^2) = 2x\,\mathbf{i}+2y\,\mathbf{j}+2z\,\mathbf{k} = 4\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$$

$z=x^2+y^2-3$ 在 $(2,-1,2)$ 的一個法線為

$$\nabla\phi_2 = \nabla(x^2+y^2-z) = 2x\,\mathbf{i}+2y\,\mathbf{j}-\mathbf{k} = 4\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}$$

$(\nabla\phi_1)\cdot(\nabla\phi_2) = |\nabla\phi_1|\,|\nabla\phi_2|\cos\theta$，其中 θ 為所求之角。則

$$\begin{aligned}(4\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k})\cdot(4\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}) &= |4\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}|\,|4\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}|\cos\theta\\ 16+4-4 &= \sqrt{(4)^2+(-2)^2+(4)^2}\,\sqrt{(4)^2+(-2)^2+(-1)^2}\cos\theta\end{aligned}$$

因此 $\cos\theta = \dfrac{16}{6\sqrt{21}} = \dfrac{8\sqrt{21}}{63} = 0.5819$；所以所夾之銳角為 $\theta = \arccos 0.5819 = 54°25'$。

4.13 令 R 為一固定點 $A(a,b,c)$ 至任意點 $P(x,y,z)$ 的距離。證明 ∇R 為在 $\mathbf{AP}=\mathbf{R}$ 方向的單位向量。

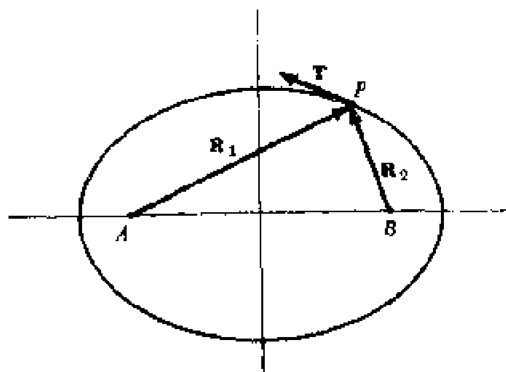
解 令 $\mathbf{r}_A$，$\mathbf{r}_P$ 分別代表 A 和 P 的位置向量 $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ 和 $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，則 $\mathbf{R}= \mathbf{r}_P-\mathbf{r}_A = (x-a)\mathbf{i}+(y-b)\mathbf{j}+(z-c)\mathbf{k}$，所以 $R=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$，因此

$$\nabla R = \nabla\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}\right) = \frac{(x-a)\mathbf{i}+(y-b)\mathbf{j}+(z-c)\mathbf{k}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} = \frac{\mathbf{R}}{R}$$

為在 $\mathbf{R}$ 方向的一個單位向量。

4.14 令P為焦點在A，B之一橢圓上的任一點，如下圖所示。證明直線AP、BP與橢圓在P點的切線所成之夾角相等。

解 令$\mathbf{R}_1=\mathbf{AP}$，$\mathbf{R}_2=\mathbf{BP}$分別代表由焦點A，B至P點的向量，$\mathbf{T}$為橢圓在P點的單位切向量。



由於橢圓的性質就是在其上之點與兩焦點的距離和為一常數p，因此此橢圓的方程式即為$R_1+R_2=p$。

由4.5題，$\nabla(R_1+R_2)$為此橢圓的法向量；因此

$[\nabla(R_1+R_2)]\cdot\mathbf{T}=0$，或 $(\nabla R_2)\cdot\mathbf{T}=-(\nabla R_1)\cdot\mathbf{T}$。

由於∇R_1與∇R_2分別為在$\mathbf{R}_1$和$\mathbf{R}_2$方向的單位向量（4.13題），所以∇R_2與$\mathbf{T}$之夾角的餘弦值和∇R_1與$-\mathbf{T}$之夾角的餘弦值相等；因此兩夾角相等。

此題有一個物理解釋，由焦點A發出的光線（或聲波）會被橢圓反射經過焦點B。

散度

4.15 若$\mathbf{A}=x^2z\,\mathbf{i}-2y^3z^2\,\mathbf{j}+xy^2z\,\mathbf{k}$，求在點$(1,-1,1)$的$\nabla\cdot\mathbf{A}$（或div $\mathbf{A}$）。

解
$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(x^2z\,\mathbf{i}-2y^3z^2\,\mathbf{j}+xy^2z\,\mathbf{k})$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}(x^2z)+\frac{\partial}{\partial y}(-2y^3z^2)+\frac{\partial}{\partial z}(xy^2z)$$
$$=2xz-6y^2z^2+xy^2=2(1)(1)-6(-1)^2(1)^2+(1)(-1)^2=-3 \text{ 在 } (1,-1,1).$$

4.16 若$\phi=2x^3y^2z^4$。

(a) 求$\nabla\cdot\nabla\phi$（或div grad ϕ）。

(b) 證明$\nabla\cdot\nabla\phi=\nabla^2\phi$，其中 $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 代表拉卜拉士運算子。

解 (a)
$$\nabla\phi=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(2x^3y^2z^4)+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(2x^3y^2z^4)+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(2x^3y^2z^4)$$
$$=6x^2y^2z^4\,\mathbf{i}+4x^3yz^4\,\mathbf{j}+8x^3y^2z^3\,\mathbf{k}$$

則
$$\nabla\cdot\nabla\phi=\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(6x^2y^2z^4\,\mathbf{i}+4x^3yz^4\,\mathbf{j}+8x^3y^2z^3\,\mathbf{k})$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}(6x^2y^2z^4)+\frac{\partial}{\partial y}(4x^3yz^4)+\frac{\partial}{\partial z}(8x^3y^2z^3)$$
$$=12xy^2z^4+4x^3z^4+24x^3y^2z^2$$

(b) $\nabla\cdot\nabla\phi = (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})\cdot(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k})$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial\phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial\phi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial\phi}{\partial z}) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

$$= (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})\phi = \nabla^2\phi$$

4.17 證明 $\nabla^2(\frac{1}{r}) = 0$.

圖
$$\nabla^2(\frac{1}{r}) = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} = -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) = \frac{\partial}{\partial x}[-x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}]$$

$$= 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} - (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

同理，

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) = \frac{2y^2-z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \quad 且 \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) = \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

再將其加總，

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) = 0.$$

方程式$\nabla^2\phi = 0$稱爲**拉卜拉士方程式**(Laplace's equation)，由上面可知$\phi = 1/r$爲此方程式之一解。

4.18 證明：(a) $\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B}$

(b) $\nabla\cdot(\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi)\cdot\mathbf{A} + \phi(\nabla\cdot\mathbf{A})$.

圖 (a) 令 $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ 。則

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})\cdot[(A_1+B_1)\mathbf{i} + (A_2+B_2)\mathbf{j} + (A_3+B_3)\mathbf{k}]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(A_1+B_1) + \frac{\partial}{\partial y}(A_2+B_2) + \frac{\partial}{\partial z}(A_3+B_3)$$

$$= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} + \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z}$$

$$= (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})\cdot(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})$$

$$+ (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})\cdot(B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k})$$

$$= \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B}$$

(b) $$\nabla\cdot(\phi\mathbf{A}) = \nabla\cdot(\phi A_1\mathbf{i} + \phi A_2\mathbf{j} + \phi A_3\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_3)$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}A_1 + \phi\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}A_2 + \phi\frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}A_3 + \phi\frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}A_1 + \frac{\partial\phi}{\partial y}A_2 + \frac{\partial\phi}{\partial z}A_3 + \phi\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) + \phi\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})$$

$$= (\nabla\phi)\cdot\mathbf{A} + \phi(\nabla\cdot\mathbf{A})$$

4.19 證明 $\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = 0$.

解 將 $\phi = r^{-3}$ 及 $\mathbf{A} = \mathbf{r}$ 代入 4.18 (b)題的結果，則

$$\nabla\cdot(r^{-3}\mathbf{r}) = (\nabla r^{-3})\cdot\mathbf{r} + (r^{-3})\nabla\cdot\mathbf{r}$$
$$= -3r^{-5}\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} + 3r^{-3} = 0,$$

利用 4.4 題。

4.20 證明 $\nabla\cdot(U\nabla V - V\nabla U) = U\nabla^2 V - V\nabla^2 U$.

解 由 4.18 (b)題，取 $\phi = U$，$\mathbf{A} = \nabla V$，

$$\nabla\cdot(U\nabla V) = (\nabla U)\cdot(\nabla V) + U(\nabla\cdot\nabla V) = (\nabla U)\cdot(\nabla V) + U\nabla^2 V$$

將 U 和 V 互換可得

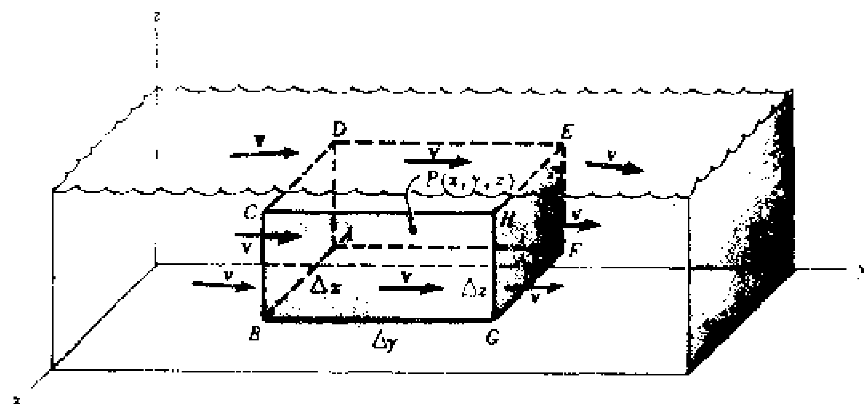
$$\nabla\cdot(V\nabla U) = (\nabla V)\cdot(\nabla U) + V\nabla^2 U.$$

再相減

$$\nabla\cdot(U\nabla V) - \nabla\cdot(V\nabla U) = \nabla\cdot(U\nabla V - V\nabla U)$$
$$= (\nabla U)\cdot(\nabla V) + U\nabla^2 V - [(\nabla V)\cdot(\nabla U) + V\nabla^2 U]$$
$$= U\nabla^2 V - V\nabla^2 U$$

4.21 一流體在任一點的流動速度爲 $\mathbf{V}(x, y, z)$。證明對一個中心在 $P(x, y, z)$，各邊平行座標軸，且長、寬、高分別爲 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 的小平行六面體，其每單位時間每單位體積獲得的流體近似於 div $\mathbf{V} = \nabla\cdot\mathbf{V}$。

解 參考下圖。



在P點速度$\mathbf{v}$的x分量 $= v_1$

在$AFED$面之中心$\mathbf{v}$的x分量$= v_1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x$ 近似值。

在$GHCB$面之中心$\mathbf{v}$的x分量$= v_1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x$ 近似值。

則

(1)每單位時間通過$AFED$的流體體積$= (v_1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x)\Delta y\Delta z$

(2)每單位時間通過$GHCB$的流體體積$= (v_1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x)\Delta y\Delta z$.

在x方向每單位時間獲得的體積 $= (2) - (1) = \dfrac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$.

同理，

在y方向每單位時間獲得的體積$= \dfrac{\partial v_2}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z$

在z方向每單位時間獲得的體積$= \dfrac{\partial v_3}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$.

因此，每單位時間每單位體積所獲得的總體積

$$= \frac{\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} + \dfrac{\partial v_3}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z}{\Delta x\Delta y\Delta z} = \text{div}\,\mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{v}$$

這只有在此平行六面體縮小到P點之極限時才成立，即當Δx，Δy及Δz趨近於0時才成立。如果在任一點都不會獲得流體，則$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$，對一不可壓縮的流體，此式稱爲**連續方程式**(continuity equation)。由於流體在任一點均不會增加也不會減少，所以稱此流體既無源點也沒有匯點。像$\mathbf{v}$這種散度爲零的向量，通常稱爲管狀向量(solenoidal)。

4.22 決定常數a使得向量 $\mathbf{V} = (x+3y)\mathbf{i} + (y-2z)\mathbf{j} + (x+az)\mathbf{k}$ 爲管狀向量。

答 一個向量爲管狀向量，也就是其散度爲0（4.21題）。

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}(x+3y) + \frac{\partial}{\partial y}(y-2z) + \frac{\partial}{\partial z}(x+az) = 1 + 1 + a$$

所以當$a=-2$時，$\nabla\cdot\mathbf{v}=a+2=0$。

旋 度

4.23 若$\mathbf{A}=xz^3\mathbf{i}-2x^2yz\mathbf{j}+2yz^4\mathbf{k}$，求在點（1，−1，1）的$\nabla\times\mathbf{A}$（或curl $\mathbf{A}$）。

答

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\times(xz^3\mathbf{i}-2x^2yz\mathbf{j}+2yz^4\mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^3 & -2x^2yz & 2yz^4 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(2yz^4)-\frac{\partial}{\partial z}(-2x^2yz)\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(xz^3)-\frac{\partial}{\partial x}(2yz^4)\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(-2x^2yz)-\frac{\partial}{\partial y}(xz^3)\right]\mathbf{k}$$

$$= (2z^4+2x^2y)\mathbf{i} + 3xz^2\mathbf{j} - 4xyz\mathbf{k} = 3\mathbf{j}+4\mathbf{k} \quad 在 (1,-1,1).$$

4.24 若 $\mathbf{A}=x^2y\mathbf{i}-2xz\mathbf{j}+2yz\mathbf{k}$，求 curl curl $\mathbf{A}$。

答 curl curl $\mathbf{A} = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})$

$$= \nabla\times\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & -2xz & 2yz \end{vmatrix} = \nabla\times\left[(2x+2z)\mathbf{i}-(x^2+2z)\mathbf{k}\right]$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x+2z & 0 & -x^2-2z \end{vmatrix}$$

$$= (2x+2)\mathbf{j}$$

4.25 證明：(*a*) $\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\times\mathbf{A}+\nabla\times\mathbf{B}$

(*b*) $\nabla\times(\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi)\times\mathbf{A}+\phi(\nabla\times\mathbf{A})$.

答 (a) 令 $\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$，$\mathbf{B}=B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}$。則

$$\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\times\left[(A_1+B_1)\mathbf{i}+(A_2+B_2)\mathbf{j}+(A_3+B_3)\mathbf{k}\right]$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1+B_1 & A_2+B_2 & A_3+B_3 \end{vmatrix}$$

$$= [\frac{\partial}{\partial y}(A_3+B_3) - \frac{\partial}{\partial z}(A_2+B_2)]\mathbf{i} + [\frac{\partial}{\partial z}(A_1+B_1) - \frac{\partial}{\partial x}(A_3+B_3)]\mathbf{j} + [\frac{\partial}{\partial x}(A_2+B_2) - \frac{\partial}{\partial y}(A_1+B_1)]\mathbf{k}$$

$$= [\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}]\mathbf{i} + [\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}]\mathbf{j} + [\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}]\mathbf{k} + [\frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z}]\mathbf{i} + [\frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial x}]\mathbf{j} + [\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y}]\mathbf{k}$$

$$= \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B}$$

(b) $\nabla\times(\phi\mathbf{A}) = \nabla\times(\phi A_1\mathbf{i} + \phi A_2\mathbf{j} + \phi A_3\mathbf{k})$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \phi A_1 & \phi A_2 & \phi A_3 \end{vmatrix}$$

$$= [\frac{\partial}{\partial y}(\phi A_3) - \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_2)]\mathbf{i} + [\frac{\partial}{\partial z}(\phi A_1) - \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_3)]\mathbf{j} + [\frac{\partial}{\partial x}(\phi A_2) - \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_1)]\mathbf{k}$$

$$= [\phi\frac{\partial A_3}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial y}A_3 - \phi\frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{\partial\phi}{\partial z}A_2]\mathbf{i} + [\phi\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{\partial\phi}{\partial z}A_1 - \phi\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial x}A_3]\mathbf{j} + [\phi\frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial x}A_2 - \phi\frac{\partial A_1}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial y}A_1]\mathbf{k}$$

$$= \phi[(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z})\mathbf{i} + (\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x})\mathbf{j} + (\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y})\mathbf{k}] + [(\frac{\partial\phi}{\partial y}A_3 - \frac{\partial\phi}{\partial z}A_2)\mathbf{i} + (\frac{\partial\phi}{\partial z}A_1 - \frac{\partial\phi}{\partial x}A_3)\mathbf{j} + (\frac{\partial\phi}{\partial x}A_2 - \frac{\partial\phi}{\partial y}A_1)\mathbf{k}]$$

$$= \phi(\nabla\times\mathbf{A}) + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x} & \dfrac{\partial\phi}{\partial y} & \dfrac{\partial\phi}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \phi(\nabla\times\mathbf{A}) + (\nabla\phi)\times\mathbf{A}.$$

4.26 若 $\nabla\times\mathbf{A}=0$，求 $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{r})$。

圖 令 $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

則

$$\mathbf{A}\times\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= (zA_2 - yA_3)\mathbf{i} + (xA_3 - zA_1)\mathbf{j} + (yA_1 - xA_2)\mathbf{k}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(zA_2 - yA_3) + \frac{\partial}{\partial y}(xA_3 - zA_1) + \frac{\partial}{\partial z}(yA_1 - xA_2)$$

$$= z\frac{\partial A_2}{\partial x} - y\frac{\partial A_3}{\partial x} + x\frac{\partial A_3}{\partial y} - z\frac{\partial A_1}{\partial y} + y\frac{\partial A_1}{\partial z} - x\frac{\partial A_2}{\partial z}$$

$$= x(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}) + y(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}) + z(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y})$$

$$= [x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}]\cdot[(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z})\mathbf{i} + (\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x})\mathbf{j} + (\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y})\mathbf{k}]$$

$$= \mathbf{r}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = \mathbf{r}\cdot\text{curl }\mathbf{A}.$$

若 $\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{0}$ 則此式可化簡爲 0。

4.27 證明：(*a*) $\nabla\times(\nabla\phi) = \mathbf{0}$ (curl grad $\phi = \mathbf{0}$), (*b*) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$ (div curl $\mathbf{A} = 0$).

圖 (*a*) $\nabla\times(\nabla\phi) = \nabla\times(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k})$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= [\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial\phi}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial\phi}{\partial y})]\mathbf{i} + [\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial\phi}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial\phi}{\partial z})]\mathbf{j} + [\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial\phi}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial\phi}{\partial x})]\mathbf{k}$$

$$= (\frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\,\partial y})\mathbf{i} + (\frac{\partial^2\phi}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial z})\mathbf{j} + (\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial x})\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

由於我們假設 ϕ 有連續二階偏導數，所以微分的順序無關緊要。

$$(b)\ \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \nabla\cdot[(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z})\mathbf{i} + (\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x})\mathbf{j} + (\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y})\mathbf{k}]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y})$$

$$= \frac{\partial^2 A_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z \partial y} = 0$$

假設A有連續二階偏導數。

注意本題之結果與 $(\mathbf{C}\times\mathbf{C}m)=(\mathbf{C}\times\mathbf{C})m=0$ 的相似性，其中m爲一純量且 $\mathbf{C}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=(\mathbf{C}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{A}=0$。

4.28 若 $f(r)$ 爲可微，求 $\text{curl}(\mathbf{r}f(r))$。

解

$$\text{curl}(\mathbf{r}f(r)) = \nabla\times(\mathbf{r}f(r))$$

$$= \nabla\times(xf(r)\mathbf{i} + yf(r)\mathbf{j} + zf(r)\mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xf(r) & yf(r) & zf(r) \end{vmatrix}$$

$$= \left(z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(x\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

但是

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{f'(r)\,x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{f'x}{r}.$$

同理，

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f'y}{r}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{f'z}{r}.$$

則

$$\text{curl}(\mathbf{r}f(r)) = \left(z\frac{f'y}{r} - y\frac{f'z}{r}\right)\mathbf{i} + \left(x\frac{f'z}{r} - z\frac{f'x}{r}\right)\mathbf{j} + \left(y\frac{f'x}{r} - x\frac{f'y}{r}\right)\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

4.29 證明 $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = -\nabla^2\mathbf{A} + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})$.

解

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla\times\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \nabla\times\left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right]$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_3}{\partial y} - \dfrac{\partial A_2}{\partial z} & \dfrac{\partial A_1}{\partial z} - \dfrac{\partial A_3}{\partial x} & \dfrac{\partial A_2}{\partial x} - \dfrac{\partial A_1}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= [\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x})]\mathbf{i}$$
$$+ [\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y})]\mathbf{j}$$
$$+ [\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z})]\mathbf{k}$$

$$= (-\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2})\mathbf{i} + (-\frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2})\mathbf{j} + (-\frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2})\mathbf{k}$$
$$+ (\frac{\partial^2 A_2}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z\,\partial x})\mathbf{i} + (\frac{\partial^2 A_3}{\partial z\,\partial y} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial x\,\partial y})\mathbf{j} + (\frac{\partial^2 A_1}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y\,\partial z})\mathbf{k}$$

$$= (-\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2})\mathbf{i} + (-\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2})\mathbf{j} + (-\frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2})\mathbf{k}$$
$$+ (\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z\,\partial x})\mathbf{i} + (\frac{\partial^2 A_1}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z\,\partial y})\mathbf{j} + (\frac{\partial^2 A_1}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2})\mathbf{k}$$

$$= -(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})$$
$$+ \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z})$$

$$= -\nabla^2\mathbf{A} + \nabla(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z})$$

$$= -\nabla^2\mathbf{A} + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})$$

如果要減少書寫的麻煩，我們可以只寫出 $\mathbf{i}$ 分量，而其他的部分可由對稱性得到。

此結果亦可用正式的方法來建立：由 2.47 (b)題

$$(1) \qquad \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$$

令 $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \nabla$，$\mathbf{C} = \mathbf{F}$，則

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) - (\nabla\cdot\nabla)\mathbf{F} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$$

注意在公式(1)中，必須將運算子 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 寫在運算元 $\mathbf{C}$ 之前，否則此方法不成立。

4.30 設 $\boldsymbol{\omega}$ 爲一常向量，若 $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$，證明 $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\text{curl }\mathbf{v}$。

答

$$\text{curl }\mathbf{v} = \nabla\times\mathbf{v} = \nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = \nabla\times\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ x & y & z\end{vmatrix}.$$

$$= \nabla\times[(\omega_2 z-\omega_3 y)\mathbf{i} + (\omega_3 x-\omega_1 z)\mathbf{j} + (\omega_1 y-\omega_2 x)\mathbf{k}]$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z-\omega_3 y & \omega_3 x-\omega_1 z & \omega_1 y-\omega_2 x \end{vmatrix} = 2(\omega_1\mathbf{i}+\omega_2\mathbf{j}+\omega_3\mathbf{k}) = 2\boldsymbol{\omega}.$$

則

$$\boldsymbol{\omega} = \tfrac{1}{2}\nabla\times\mathbf{v} = \tfrac{1}{2}\operatorname{curl}\mathbf{v}.$$

此題指出一個向量場的旋度與此場的旋轉性質有關。這在第 6 章中會予以證實。如果此場 **F** 是由一流動流體所產生，則將一蹼輪（paddle wheel）放在此場中各點，在 curl $\mathbf{F}\neq 0$ 的區域蹼輪會旋轉；而在 curl $\mathbf{F}=0$ 的區域，蹼輪不會轉動，我們稱在此區域，**F** 爲一*非旋場*(irrotational field)。一個旋轉場通常也稱爲*渦旋場*(vortex field)。

4.31 若 $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$, $\nabla\cdot\mathbf{H}=0$, $\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$, $\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$，證明 **E** 及 **H** 滿足 $\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

答

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = \nabla\times\left(-\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$$

由 4.29 題，

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = -\nabla^2\mathbf{E}+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}) = -\nabla^2\mathbf{E}. \quad 則 \quad \nabla^2\mathbf{E} = \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

同理，

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{H}) = \nabla\times\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{E}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

但

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{H}) = -\nabla^2\mathbf{H}+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{H}) = -\nabla^2\mathbf{H}. \quad 則 \quad \nabla^2\mathbf{H} = \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

此方程式即爲*電磁學上的馬克士威偏方程式*(Maxwell's equation)，而方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 稱爲*波方程式*(wave equation)。

各類問題

4.32 (a) 一向量 **V**，若 curl $\mathbf{V}=0$ 則稱爲非旋（4.30 題）。求常數 a, b, c，使

$$\mathbf{V} = (x+2y+az)\mathbf{i} + (bx-3y-z)\mathbf{j} + (4x+cy+2z)\mathbf{k}$$

爲非旋。

(b) 證明 $\mathbf{V}$ 可以表示成一個純量函數的梯度。

圖

(a) $$\operatorname{curl}\mathbf{V} = \nabla\times\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+2y+az & bx-3y-z & 4x+cy+2z \end{vmatrix} = (c+1)\mathbf{i} + (a-4)\mathbf{j} + (b-2)\mathbf{k}$$

當 $a=4$，$b=2$，$c=-1$ 時，上式等於零，因此

$$\mathbf{V} = (x+2y+4z)\mathbf{i} + (2x-3y-z)\mathbf{j} + (4x-y+2z)\mathbf{k}$$

(b) 假設 $\mathbf{V} = \nabla\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$

則

$$(1)\ \frac{\partial\phi}{\partial x} = x+2y+4z, \quad (2)\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = 2x-3y-z, \quad (3)\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = 4x-y+2z.$$

將(1)對 x 積分，y 和 z 保持固定，

$$(4) \qquad \phi = \frac{x^2}{2} + 2xy + 4xz + f(y,z)$$

其中 $f(y,z)$ 爲任一 y，z 的函數。同理由(2)及(3)可得

$$(5) \qquad \phi = 2xy - \frac{3y^2}{2} - yz + g(x,z)$$

$$(6) \qquad \phi = 4xz - yz + z^2 + h(x,y).$$

比較(4)、(5)、(6)後顯示如果我們選取

$$f(y,z) = -\frac{3y^2}{2} + z^2, \quad g(x,z) = \frac{x^2}{2} + z^2, \quad h(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2}$$

則 ϕ 有一共同値，因此

$$\phi = \frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + z^2 + 2xy + 4xz - yz$$

注意我們也可以把 ϕ 加上任意常數。一般來說，如果 $\nabla\times\mathbf{V}=\mathbf{0}$，則我們可以找到 ϕ 使得 $\mathbf{V}=\nabla\phi$。一個向量場 $\mathbf{V}$，若可由一純量場 ϕ 以 $\mathbf{V}=\nabla\phi$ 導出，則稱此向量場爲一保守向量場(conservative vector field)且 ϕ 稱爲純量位((scalar potential)。注意反過來若 $\mathbf{V}=\nabla\phi$，則 $\nabla\times\mathbf{V}=\mathbf{0}$（參閱 4.27(a) 題）。

4.33 證明若 $\phi(x,y,z)$ 爲拉卜拉士方程式的任一解，則 $\nabla\phi$ 爲一非旋且管狀向量。

圖 由假設，ϕ 滿足拉卜拉士方程式 $\nabla^2\phi=0$，即 $\nabla\cdot(\nabla\phi)=0$。則 $\nabla\phi$ 爲管狀向

量（參閱4.21及4.22題）。

由4.27(a)題，$\nabla\times(\nabla\phi)=0$，所以$\nabla\phi$也是一非旋向量。

4.34 試給grad **B**下一定義。

解 假設 $\mathbf{B}=B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}$。形式上可將grad **B**定義成

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{B} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial B_1}{\partial x}\mathbf{ii}+\frac{\partial B_2}{\partial x}\mathbf{ij}+\frac{\partial B_3}{\partial x}\mathbf{ik} \\ &\quad +\frac{\partial B_1}{\partial y}\mathbf{ji}+\frac{\partial B_2}{\partial y}\mathbf{jj}+\frac{\partial B_3}{\partial y}\mathbf{jk} \\ &\quad +\frac{\partial B_1}{\partial z}\mathbf{ki}+\frac{\partial B_2}{\partial z}\mathbf{kj}+\frac{\partial B_3}{\partial z}\mathbf{kk}\end{aligned}$$

量 **ii**，**ij**，… 稱爲單位並矢(unit dyad)。（注意，**ij**與**ji**不相等。）一個形如

$$a_{11}\mathbf{ii}+a_{12}\mathbf{ij}+a_{13}\mathbf{ik}+a_{21}\mathbf{ji}+a_{22}\mathbf{jj}+a_{23}\mathbf{jk}+a_{31}\mathbf{ki}+a_{32}\mathbf{kj}+a_{33}\mathbf{kk}$$

的量稱爲並矢式(dyadic)而係數a_{11}，a_{12}，…爲其分量(component)。這九個分量排成一個陣列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

稱爲一 3×3 矩陣(matrix)。一個並矢式是一個向量的一般化。還有更進一步的一般化就是三矢式(triadics)，它是由$a_{111}\mathbf{iii}+a_{211}\mathbf{jii}+\cdots$等27項所組成。關於如何將並矢式或三矢式的分量由一個座標系轉換到另一個座標系的研究，我們會在第8章張量分析(tensor analysis)中討論。

4.35 令向量**A**定義爲$\mathbf{A}=\qquad\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$，且並矢式Φ定義爲

$$\Phi = a_{11}\mathbf{ii}+a_{12}\mathbf{ij}+a_{13}\mathbf{ik}+a_{21}\mathbf{ji}+a_{22}\mathbf{jj}+a_{23}\mathbf{jk}+a_{31}\mathbf{ki}+a_{32}\mathbf{kj}+a_{33}\mathbf{kk}$$

試給$\mathbf{A}\cdot\Phi$下一個定義。

解 在形式上，我們假設分配律成立，

$$\mathbf{A}\cdot\Phi = (A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})\cdot\Phi = A_1\mathbf{i}\cdot\Phi+A_2\mathbf{j}\cdot\Phi+A_3\mathbf{k}\cdot\Phi$$

舉例來說，考慮$\mathbf{i}\cdot\Phi$。此乘積是取**i**與Φ各項的點積再將結果加總。其各項爲$\mathbf{i}\cdot a_{11}\mathbf{ii}$, $\mathbf{i}\cdot a_{12}\mathbf{ij}$, $\mathbf{i}\cdot a_{21}\mathbf{ji}$, $\mathbf{i}\cdot a_{32}\mathbf{kj}$，等等。如果我們對各項賦予以下的意

義：

$$\mathbf{i}\cdot a_{11}\mathbf{i}\mathbf{i} = a_{11}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} = a_{11}\mathbf{i} \quad 由於 \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1$$
$$\mathbf{i}\cdot a_{12}\mathbf{i}\mathbf{j} = a_{12}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})\mathbf{j} = a_{12}\mathbf{j} \quad 由於 \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1$$
$$\mathbf{i}\cdot a_{21}\mathbf{j}\mathbf{i} = a_{21}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j})\mathbf{i} = 0 \quad 由於 \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0$$
$$\mathbf{i}\cdot a_{32}\mathbf{k}\mathbf{j} = a_{32}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k})\mathbf{j} = 0 \quad 由於 \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0$$

並對 $\mathbf{j}\cdot\Phi$ 與 $\mathbf{k}\cdot\Phi$ 的各項給予同樣的解釋，則

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\Phi &= A_1(a_{11}\mathbf{i}+a_{12}\mathbf{j}+a_{13}\mathbf{k}) + A_2(a_{21}\mathbf{i}+a_{22}\mathbf{j}+a_{23}\mathbf{k}) + A_3(a_{31}\mathbf{i}+a_{32}\mathbf{j}+a_{33}\mathbf{k})\\ &= (A_1a_{11}+A_2a_{21}+A_3a_{31})\mathbf{i} + (A_1a_{12}+A_2a_{22}+A_3a_{32})\mathbf{j} + (A_1a_{13}+A_2a_{23}+A_3a_{33})\mathbf{k}\end{aligned}$$

爲一向量。

4.36 (a)解釋符號 $\mathbf{A}\cdot\nabla$。(b)給予 $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$ 一個可能的意義。(c)如果將此式寫成 $\mathbf{A}\cdot\nabla\mathbf{B}$ 會不會產生混淆。

解 (a) 令 $\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$。則在形式上

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\nabla &= (A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})\cdot(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})\\ &= A_1\frac{\partial}{\partial x} + A_2\frac{\partial}{\partial y} + A_3\frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}$$

爲一運算子。例如

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\phi = (A_1\frac{\partial}{\partial x}+A_2\frac{\partial}{\partial y}+A_3\frac{\partial}{\partial z})\phi = A_1\frac{\partial\phi}{\partial x} + A_2\frac{\partial\phi}{\partial y} + A_3\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

注意此時與 $\mathbf{A}\cdot\nabla\phi$ 相同。

(b) 形式上，將(a)中的 ϕ 用 $\mathbf{B}=B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}$ 取代，

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} &= (A_1\frac{\partial}{\partial x}+A_2\frac{\partial}{\partial y}+A_3\frac{\partial}{\partial z})\mathbf{B} = A_1\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x} + A_2\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial y} + A_3\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial z}\\ &= (A_1\frac{\partial B_1}{\partial x}+A_2\frac{\partial B_1}{\partial y}+A_3\frac{\partial B_1}{\partial z})\mathbf{i} + (A_1\frac{\partial B_2}{\partial x}+A_2\frac{\partial B_2}{\partial y}+A_3\frac{\partial B_2}{\partial z})\mathbf{j} + (A_1\frac{\partial B_3}{\partial x}+A_2\frac{\partial B_3}{\partial y}+A_3\frac{\partial B_3}{\partial z})\mathbf{k}\end{aligned}$$

(c) 利用4.34題中對 $\nabla\mathbf{B}$ 的解釋，再依據4.35題所建立的符號體系，

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\nabla\mathbf{B} &= (A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})\cdot\nabla\mathbf{B} = A_1\mathbf{i}\cdot\nabla\mathbf{B} + A_2\mathbf{j}\cdot\nabla\mathbf{B} + A_3\mathbf{k}\cdot\nabla\mathbf{B}\\ &= A_1(\frac{\partial B_1}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial B_2}{\partial x}\mathbf{j}+\frac{\partial B_3}{\partial x}\mathbf{k}) + A_2(\frac{\partial B_1}{\partial y}\mathbf{i}+\frac{\partial B_2}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial B_3}{\partial y}\mathbf{k}) + A_3(\frac{\partial B_1}{\partial z}\mathbf{i}+\frac{\partial B_2}{\partial z}\mathbf{j}+\frac{\partial B_3}{\partial z}\mathbf{k})\end{aligned}$$

得到的結果與(b)相同，由此可知只要引入並矢式的觀念，並且說明它的性質，$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}=\mathbf{A}\cdot\nabla\mathbf{B}$ 並不會引起混淆。

4.37 若 $\mathbf{A}=2yz\mathbf{i}-x^2y\mathbf{j}+xz^2\mathbf{k}$，$\mathbf{B}=x^2\mathbf{i}+yz\mathbf{j}-xy\mathbf{k}$ 且 $\phi=2x^2yz^3$，求

(a) $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\phi$, (b) $\mathbf{A}\cdot\nabla\phi$, (c) $(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$, (d) $(\mathbf{A}\times\nabla)\phi$, (e) $\mathbf{A}\times\nabla\phi$.

答 (a)
$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\cdot\nabla)\phi &= \left[(2yz\,\mathbf{i} - x^2y\,\mathbf{j} + xz^2\,\mathbf{k})\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\right]\phi \\
&= \left(2yz\frac{\partial}{\partial x} - x^2y\frac{\partial}{\partial y} + xz^2\frac{\partial}{\partial z}\right)(2x^2yz^3) \\
&= 2yz\frac{\partial}{\partial x}(2x^2yz^3) - x^2y\frac{\partial}{\partial y}(2x^2yz^3) + xz^2\frac{\partial}{\partial z}(2x^2yz^3) \\
&= (2yz)(4xyz^3) - (x^2y)(2x^2z^3) + (xz^2)(6x^2yz^2) \\
&= 8xy^2z^4 - 2x^4yz^3 + 6x^3yz^4\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\nabla\phi &= (2yz\,\mathbf{i} - x^2y\,\mathbf{j} + xz^2\,\mathbf{k})\cdot\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right) \\
&= (2yz\,\mathbf{i} - x^2y\,\mathbf{j} + xz^2\,\mathbf{k})\cdot(4xyz^3\,\mathbf{i} + 2x^2z^3\,\mathbf{j} + 6x^2yz^2\,\mathbf{k}) \\
&= 8xy^2z^4 - 2x^4yz^3 + 6x^3yz^4\end{aligned}$$

與(a)比較，說明了 $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\phi = \mathbf{A}\cdot\nabla\phi$ 的結果。

(c)
$$\begin{aligned}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} &= \left[(x^2\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} - xy\,\mathbf{k})\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\right]\mathbf{A} \\
&= \left(x^2\frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial}{\partial y} - xy\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{A} = x^2\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} + yz\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} - xy\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z} \\
&= x^2(-2xy\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}) + yz(2z\,\mathbf{i} - x^2\,\mathbf{j}) - xy(2y\,\mathbf{i} + 2xz\,\mathbf{k}) \\
&= (2yz^2 - 2xy^2)\mathbf{i} - (2x^3y + x^2yz)\mathbf{j} + (x^2z^2 - 2x^2yz)\mathbf{k}\end{aligned}$$

將此結果與 $\mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{A}$ 比較，見 4.36 (c)題。

(d)
$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\times\nabla)\phi &= \left[(2yz\,\mathbf{i} - x^2y\,\mathbf{j} + xz^2\,\mathbf{k})\times\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\right]\phi \\
&= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2yz & -x^2y & xz^2 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\end{vmatrix}\phi \\
&= \left[\mathbf{i}\left(-x^2y\frac{\partial}{\partial z} - xz^2\frac{\partial}{\partial y}\right) + \mathbf{j}\left(xz^2\frac{\partial}{\partial x} - 2yz\frac{\partial}{\partial z}\right) + \mathbf{k}\left(2yz\frac{\partial}{\partial y} + x^2y\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\phi \\
&= -\left(x^2y\frac{\partial\phi}{\partial z} + xz^2\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(xz^2\frac{\partial\phi}{\partial x} - 2yz\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(2yz\frac{\partial\phi}{\partial y} + x^2y\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\mathbf{k} \\
&= -(6x^4y^2z^2 + 2x^3z^5)\mathbf{i} + (4x^2yz^5 - 12x^2y^2z^3)\mathbf{j} + (4x^2yz^4 + 4x^3y^2z^3)\mathbf{k}\end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\nabla\phi &= (2yz\,\mathbf{i} - x^2y\,\mathbf{j} + xz^2\,\mathbf{k})\times\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right) \\
&= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2yz & -x^2y & xz^2 \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x} & \dfrac{\partial\phi}{\partial y} & \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$= (-x^2y\frac{\partial\phi}{\partial z} - xz^2\frac{\partial\phi}{\partial y})\mathbf{i} + (xz^2\frac{\partial\phi}{\partial x} - 2yz\frac{\partial\phi}{\partial z})\mathbf{j} + (2yz\frac{\partial\phi}{\partial y} + x^2y\frac{\partial\phi}{\partial x})\mathbf{k}$$

$$= -(6x^4y^2z^7 + 2x^3z^5)\mathbf{i} + (4x^2yz^5 - 12x^2y^2z^3)\mathbf{j} + (4x^2yz^4 + 4x^3y^2z^3)\mathbf{k}$$

與(d)比較，說明了 $(\mathbf{A}\times\nabla)\phi = \mathbf{A}\times\nabla\phi$ 的結果。

不變量

4.38 兩個直角座標系 xyz 及 $x'y'z'$ 有共同的原點，各軸相對旋轉了某一角度。試導出一點在此二座標系中的座標變換式。

解 令 $\mathbf{r}$ 及 $\mathbf{r}'$ 分別代表任一點 P 在兩個座標系中的位置向量（參閱 4.6 節的圖形）。則由於 $\mathbf{r}=\mathbf{r}'$，所以

$$(1) \qquad x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}' = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

對任一向量 $\mathbf{A}$ 我們有（2.20題）

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{k}')\mathbf{k}'$$

再分別令 $\mathbf{A}=\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$ 可得

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathbf{i} = (\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}')\mathbf{k}' = l_{11}\mathbf{i}' + l_{21}\mathbf{j}' + l_{31}\mathbf{k}' \\ \mathbf{j} = (\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}')\mathbf{k}' = l_{12}\mathbf{i}' + l_{22}\mathbf{j}' + l_{32}\mathbf{k}' \\ \mathbf{k} = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')\mathbf{k}' = l_{13}\mathbf{i}' + l_{23}\mathbf{j}' + l_{33}\mathbf{k}' \end{cases}$$

將方程組(2)代入(1)，再令 $\mathbf{i}'$，$\mathbf{j}'$，$\mathbf{k}'$ 的係數相等可求出

$$(3) \qquad x' = l_{11}x + l_{12}y + l_{13}z, \quad y' = l_{21}x + l_{22}y + l_{23}z, \quad z' = l_{31}x + l_{32}y + l_{33}z$$

此即爲所要求的變換方程式。

4.39 證明 $\mathbf{i}' = l_{11}\mathbf{i} + l_{12}\mathbf{j} + l_{13}\mathbf{k}$
$\mathbf{j}' = l_{21}\mathbf{i} + l_{22}\mathbf{j} + l_{23}\mathbf{k}$
$\mathbf{k}' = l_{31}\mathbf{i} + l_{32}\mathbf{j} + l_{33}\mathbf{k}$

解 對任一向量 $\mathbf{A}$ 我們有

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}.$$

再分別令 $\mathbf{A}=\mathbf{i}'$，$\mathbf{j}'$，$\mathbf{k}'$ 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' &= (\mathbf{i}'\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{i}'\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{i}'\cdot\mathbf{k})\mathbf{k} = l_{11}\mathbf{i} + l_{12}\mathbf{j} + l_{13}\mathbf{k} \\ \mathbf{j}' &= (\mathbf{j}'\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{j}'\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{j}'\cdot\mathbf{k})\mathbf{k} = l_{21}\mathbf{i} + l_{22}\mathbf{j} + l_{23}\mathbf{k} \\ \mathbf{k}' &= (\mathbf{k}'\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{k}'\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{k}'\cdot\mathbf{k})\mathbf{k} = l_{31}\mathbf{i} + l_{32}\mathbf{j} + l_{33}\mathbf{k} \end{aligned}$$

4.40 證明若$m=n$，則 $\sum_{p=1}^{3} l_{pm} l_{pn} = 1$，若$m \neq n$，則 $\sum_{p=1}^{3} l_{pm} l_{pn} = 0$，其中$m$與$n$為1，2，3中任一值。

解 由4.38題之(2)式，

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1 = (l_{11}\mathbf{i}' + l_{21}\mathbf{j}' + l_{31}\mathbf{k}')\cdot(l_{11}\mathbf{i}' + l_{21}\mathbf{j}' + l_{31}\mathbf{k}') = l_{11}^2 + l_{21}^2 + l_{31}^2$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0 = (l_{11}\mathbf{i}' + l_{21}\mathbf{j}' + l_{31}\mathbf{k}')\cdot(l_{12}\mathbf{i}' + l_{22}\mathbf{j}' + l_{32}\mathbf{k}') = l_{11}l_{12} + l_{21}l_{22} + l_{31}l_{32}$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0 = (l_{11}\mathbf{i}' + l_{21}\mathbf{j}' + l_{31}\mathbf{k}')\cdot(l_{13}\mathbf{i}' + l_{23}\mathbf{j}' + l_{33}\mathbf{k}') = l_{11}l_{13} + l_{21}l_{23} + l_{31}l_{33}$$

由此證明了$m=1$所需的結果。考慮$\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}$，$\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}$，$\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}$，$\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}$，$\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}$與$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}$，可證得$m=2$及$m=3$的結果。令

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & 若 m=n \\ 0 & 若 m \neq n \end{cases}，此結果可寫成 \sum_{p=1}^{3} l_{pm} l_{pn} = \delta_{mn}.$$

符號δ_{mn}稱爲克郎乃克記號(Kronecker's symbol)。

4.41 若$\phi(x,y,z)$相對於軸的旋轉爲一純量不變量，證明在此變換下grad ϕ爲一向量不變量。

解 由假設$\phi(x,y,z)=\phi'(x',y',z')$，要得到所需的結果我們必須證明

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = \frac{\partial\phi'}{\partial x'}\mathbf{i}' + \frac{\partial\phi'}{\partial y'}\mathbf{j}' + \frac{\partial\phi'}{\partial z'}\mathbf{k}'$$

利用鏈鎖法則及4.38題的變換式(3)，我們有

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial\phi'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial\phi'}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} = \frac{\partial\phi'}{\partial x'}l_{11} + \frac{\partial\phi'}{\partial y'}l_{21} + \frac{\partial\phi'}{\partial z'}l_{31}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial\phi'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial\phi'}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y} = \frac{\partial\phi'}{\partial x'}l_{12} + \frac{\partial\phi'}{\partial y'}l_{22} + \frac{\partial\phi'}{\partial z'}l_{32}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial\phi'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial\phi'}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{\partial\phi'}{\partial x'}l_{13} + \frac{\partial\phi'}{\partial y'}l_{23} + \frac{\partial\phi'}{\partial z'}l_{33}$$

將這些方程式分別乘上$\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$，相加再利用4.39題，就可得到所需的結果。

補充題

4.42 若$\phi = 2xz^4 - x^2y$，求$\nabla\phi$及$|\nabla\phi|$在點(2，−2，−1)之值。

答 $10\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$，$2\sqrt{93}$

4.43 若 $\mathbf{A}=2x^2\mathbf{i}-3yz\mathbf{j}+xz^2\mathbf{k}$，$\phi=2z-x^3y$，求 $\mathbf{A}\cdot\nabla\phi$ 及 $\mathbf{A}\times\nabla\phi$ 在點(1，−1，1)之值。

答 5，$7\mathbf{i}-\mathbf{j}-11\mathbf{k}$

4.44 若 $F=x^2z+e^{y/x}$，$G=2z^2y-xy^2$，求(a) $\nabla(F+G)$ 及(b) $\nabla(FG)$ 在點(1，0，−2)之値。

答 (a) $-4\mathbf{i}+9\mathbf{j}+\mathbf{k}$，(b) $-8\mathbf{j}$

4.45 求 $\nabla|\mathbf{r}|^3$。

答 $3r\mathbf{r}$

4.46 證明 $\nabla f(r)=\dfrac{f'(r)\mathbf{r}}{r}$.

4.47 求 $\nabla\left(3r^2-4\sqrt{r}+\dfrac{6}{\sqrt[3]{r}}\right)$.

答 $(6-2r^{-3/2}-2r^{-7/3})\mathbf{r}$

4.48 若 $\nabla U=2r^4\mathbf{r}$，求 U。

答 $r^6/3+$常數

4.49 求 $\phi(r)$ 使得 $\nabla\phi=\dfrac{\mathbf{r}}{r^5}$ 且 $\phi(1)=0$。

答 $\phi(r)=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{r^3}\right)$

4.50 求 $\nabla\psi$ 其中 $\psi=(x^2+y^2+z^2)e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

答 $(2-r)e^{-r}\mathbf{r}$

4.51 若 $\nabla\phi=2xyz^3\mathbf{i}+x^2z^3\mathbf{j}+3x^2yz^2\mathbf{k}$，且 $\phi(1,-2,2)=4$，求 $\phi(x,y,z)$

答 $\phi=x^2yz^3+20$

4.52 若 $\nabla\psi=(y^2-2xyz^3)\mathbf{i}+(3+2xy-x^2z^3)\mathbf{j}+(6z^3-3x^2yz^2)\mathbf{k}$，求 ψ。

答 $\psi=xy^2-x^2yz^3+3y+(3/2)z^4$ ＋常數

4.53 若 U 爲一 x，y，z 的可微函數，證明 $\nabla U\cdot d\mathbf{r}=dU$。

4.54 若 F 爲 x，y，z，t 的可微函數，且 x，y，z 爲 t 的可微函數，證明

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\nabla F\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

4.55 若 $\mathbf{A}$ 爲一常向量，證明 $\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{A})=\mathbf{A}$。

4.56 若 $\mathbf{A}(x,y,z)=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$ 證明 $d\mathbf{A}=(\nabla A_1\cdot d\mathbf{r})\mathbf{i}+(\nabla A_2\cdot d\mathbf{r})\mathbf{j}+(\nabla A_3\cdot d\mathbf{r})\mathbf{k}$.

4.57 若$G\neq 0$，證明 $\nabla\left(\frac{F}{G}\right)=\frac{G\nabla F-F\nabla G}{G^2}$

4.58 求一單位向量，其在點（1，2，5）與旋轉拋物面 $z=x^2+y^2$ 垂直。

答 $\frac{2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k}}{\pm\sqrt{21}}$

4.59 求曲面 $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=9$ 在點（3，1，−4）的向外單位法向量。

答 $(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k})/3$

4.60 求曲面 $xz^2+x^2y=z-1$ 在點（1，−3，2）的切平面方程式。

答 $2x-y-3z+1=0$

4.61 求曲面 $z=x^2+y^2$ 在點（2，−1，5）的切平面及法線方程式。

答 $4x-2y-z=5$，$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{-1}$ 或 $x=4t+2,\ y=-2t-1,\ z=-t+5$

4.62 求 $\phi=4xz^3-3x^2y^2z$ 在（2，−1，2）對 $2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ 方向的方向導數。

答 376/7

4.63 求 $P=4e^{2x-y+z}$ 在點（1，1，−1）對指向點（−3，5，6）方向的方向導數。

答 −20/9

4.64 $\phi=2xz-y^2$ 在點（1，3，2）對那一個方向的方向導數最大？此最大量是多少？

答 在向量 $4\mathbf{i}-6\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ 的方向，$2\sqrt{14}$

4.65 求常數 a，b，c 之值，使得 $\phi=axy^2+byz+cz^2x^3$ 在（1，2，−1）對平行 z 軸的方向有大小為 64 的最大方向導數。

答 $a=6$，$b=24$，$c=-8$

4.66 求曲面 $xy^2z=3x+z^2$ 與 $3x^2-y^2+2z=1$ 在點（1，−2，1）所交的銳角。

答 $\arccos\frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{21}}=\arccos\frac{\sqrt{6}}{14}=79°55'$

4.67 求常數 a 和 b，使得曲面 $ax^2-byz=(a+2)x$ 在點（1，−1，2）與曲面 $4x^2y+z^3=4$ 垂直。

答 $a=5/2$，$b=1$

4.68 (a) 令 u 和 v 為 x，y，z 的可微函數，證明 u，v 能以方程式 $F(u,v)=0$ 函數相關（functionally related）的充要條件為 $\nabla u\times\nabla v=0$。

(b) 決定 $u=\arctan x+\arctan y$ 與 $v=\frac{x+y}{1-xy}$ 是否函數相關？

答 (b) 是（$v=\tan u$）

4.69 (a) 證明 $u(x,y,z)$，$v(x,y,z)$，$w(x,y,z)$ 能以方程式 $F(u,v,w)=0$ 函數相關的充要條件為 $\nabla u\cdot\nabla v\times\nabla w=0$。

(b) 用行列式形式表示 $\nabla u\cdot\nabla v\times\nabla w$。此行列式稱爲 u，v，w 對於 x，y，z 的亞可比 (Jacobian) 行列式，記作 $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ 或 $J(\frac{u,v,w}{x,y,z})$。

(c) 決定 $u=x+y+z$，$v=x^2+y^2+z^2$ 及 $w=xy+yz+zx$ 是否爲函數相關。

答 (b) $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$ (c) 是 $(u^2-v-2w=0)$

4.70 若 $\mathbf{A}=3xyz^2\,\mathbf{i}+2xy^3\,\mathbf{j}-x^2yz\,\mathbf{k}$，$\phi=3x^2-yz$，求 (a) $\nabla\cdot\mathbf{A}$, (b) $\mathbf{A}\cdot\nabla\phi$, (c) $\nabla\cdot(\phi\mathbf{A})$, (d) $\nabla\cdot(\nabla\phi)$, 在點 (1，−1，1) 之值。

答 (a) 4, (b) −15, (c) 1, (d) 6

4.71 求 $\text{div}\,(2x^2z\,\mathbf{i}-xy^2z\,\mathbf{j}+3yz^2\,\mathbf{k})$。

答 $4xz-2xyz+6yz$

4.72 若 $\phi=3x^2z-y^2z^3+4x^3y+2x-3y-5$，求 $\nabla^2\phi$。

答 $6z+24xy-2z^3-6y^2z$

4.73 求 $\nabla^2(\ln r)$。

答 $1/r^2$

4.74 證明 $\nabla^2 r^n=n(n+1)r^{n-2}$，其中 n 爲一常數。

4.75 若 $\mathbf{F}=(3x^2y-z)\mathbf{i}+(xz^3+y^4)\mathbf{j}-2x^3z^2\mathbf{k}$，求 $\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})$ 在點 (2，−1，0) 之值。

答 $-6\mathbf{i}+24\mathbf{j}-32\mathbf{k}$

4.76 若 $\boldsymbol{\omega}$ 爲一常向量，且 $\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$，證明 $\text{div}\,\mathbf{v}=0$。

4.77 證明 $\nabla^2(\phi\psi)=\phi\nabla^2\psi+2\nabla\phi\cdot\nabla\psi+\psi\nabla^2\phi$.

4.78 若 $U=3x^2y$，$V=xz^3-2y$ 求 $\text{grad}\,[(\text{grad}\,U)\cdot(\text{grad}\,V)]$。

答 $(6yz^2-12x)\mathbf{i}+6xz^2\mathbf{j}+12xyz\,\mathbf{k}$

4.79 求 $\nabla\cdot(r^3\mathbf{r})$。

答 $6r^3$

4.80 求 $\nabla\cdot[r\nabla(1/r^3)]$

答 $3r^{-4}$

4.81 求 $\nabla^2[\nabla\cdot(\mathbf{r}/r^2)]$

答 $2r^{-4}$

4.82 若$\mathbf{A}=\mathbf{r}/r$，求 grad div $\mathbf{A}$。

答 $-2r^{-3}\mathbf{r}$

4.83 (a)證明 $\nabla^2 f(r)=\dfrac{d^2f}{dr^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{df}{dr}$。(b)求$f(r)$使得$\nabla^2 f(r)=0$。

答 $f(r)=A+B/r$ 其中A和B爲任意常數

4.84 證明向量$\mathbf{A}=3y^4z^2\mathbf{i}+4x^3z^2\mathbf{j}-3x^2y^2\mathbf{k}$ 爲管狀向量。

4.85 證明 $\mathbf{A}=(2x^2+8xy^2z)\mathbf{i}+(3x^3y-3xy)\mathbf{j}-(4y^2z^2+2x^3z)\mathbf{k}$ 不是管狀向量，但$\mathbf{B}=xyz^2\mathbf{A}$ 爲一管狀向量。

4.86 求使$f(r)\mathbf{r}$爲管狀向量之最一般的可微函數$f(r)$。

答 $f(r)=C/r^3$，其中C爲任意常數。

4.87 證明向量 $\mathbf{v}=\dfrac{-x\mathbf{i}-y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 爲一匯集場(sink field)。繪圖並給一物理說明。

4.88 若U和V爲可微純量場，證明$\nabla U\times\nabla V$爲管狀向量。

4.89 若 $\mathbf{A}=2xz^2\mathbf{i}-yz\mathbf{j}+3xz^3\mathbf{k}$，$\phi=x^2yz$，求
(a) $\nabla\times\mathbf{A}$，(b) curl $(\phi\mathbf{A})$，(c) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})$，(d) $\nabla[\mathbf{A}\cdot\text{curl}\,\mathbf{A}]$，(e) curl grad $(\phi\mathbf{A})$ 在點(1，1，1)之値。

答 (a) $\mathbf{i}+\mathbf{j}$，(b) $5\mathbf{i}-3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$，(c) $5\mathbf{i}+3\mathbf{k}$，(d) $-2\mathbf{i}+\mathbf{j}+8\mathbf{k}$，(e) $\mathbf{0}$

4.90 若 $F=x^2yz$，$G=xy-3z^2$，求 (a) $\nabla[(\nabla F)\cdot(\nabla G)]$，(b) $\nabla\cdot\{(\nabla F)\times(\nabla G)\}$，(c) $\nabla\times\{(\nabla F)\times(\nabla G)\}$。

答 (a) $(2y^2z+3x^2z-12xyz)\mathbf{i}+(4xyz-6x^2z)\mathbf{j}+(2xy^2+x^3-6x^2y)\mathbf{k}$
(b) 0
(c) $(x^2z-24xyz)\mathbf{i}-(12x^2z+2xyz)\mathbf{j}+(2xy^2+12yz^2+x^3)\mathbf{k}$

4.91 求 $\nabla\times(\mathbf{r}/r^2)$。

答 0

4.92 若向量 $\mathbf{A}=(axy-z^3)\mathbf{i}+(a-2)x^2\mathbf{j}+(1-a)xz^2\mathbf{k}$ 的旋度恒等於零，求常數a之值。

答 $a=4$

4.93 證明 curl $(\phi$ grad $\phi)=\mathbf{0}$。

4.94 畫出向量場$\mathbf{A}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$及$\mathbf{B}=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}$。計算各向量場的旋度及散度並解釋此結果的物理特性。

4.95 若 $\mathbf{A}=x^2z\mathbf{i}+yz^3\mathbf{j}-3xy\mathbf{k}$，$\mathbf{B}=y^2\mathbf{i}-yz\mathbf{j}+2x\mathbf{k}$，$\phi=2x^2+yz$，求
(a) $\mathbf{A}\cdot(\nabla\phi)$，(b) $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\phi$，(c) $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$，(d) $\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\nabla)$，(e) $(\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}$。

答 (a) $4x^3z+yz^4-3xy^2$，(b) $4x^3z+yz^4-3xy^2$（與(a)同）
(c) $2y^2z^3\mathbf{i}+(3xy^2-yz^4)\mathbf{j}+2x^2z\mathbf{k}$，
(d) 運算子 $(x^2y^2z\mathbf{i}-x^2yz^2\mathbf{j}+2x^3z\mathbf{k})\dfrac{\partial}{\partial x}+(y^3z^3\mathbf{i}-y^2z^4\mathbf{j}+2xyz^3\mathbf{k})\dfrac{\partial}{\partial y}$

$+ (-3xy^3 \mathbf{i} + 3xy^2z\mathbf{j} - 6x^2y\mathbf{k})\dfrac{\partial}{\partial z}$

(e) $(2xy^2z + y^2z^3)\mathbf{i} - (2xyz^2 + yz^4)\mathbf{j} + (4x^2z + 2xz^3)\mathbf{k}$

4.96 若 $\mathbf{A} = yz^2\mathbf{i} - 3xz^2\mathbf{j} + 2xyz\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 3x\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} - xy\mathbf{k}$ ，$\phi = xyz$ ，求
(a) $\mathbf{A}\times(\nabla\phi)$, (b) $(\mathbf{A}\times\nabla)\phi$, (c) $(\nabla\times\mathbf{A})\times\mathbf{B}$, (d) $\mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A}$.

答 (a) $-5x^2yz^2\mathbf{i} + xy^2z^2\mathbf{j} + 4xyz^3\mathbf{k}$
(b) $-5x^2yz^2\mathbf{i} + xy^2z^2\mathbf{j} + 4xyz^3\mathbf{k}$ （與(a)同）
(c) $16z^3\mathbf{i} + (8x^2yz - 12xz^2)\mathbf{j} + 32xz^2\mathbf{k}$ (d) $24x^2z + 4xyz^2$

4.97 若 $\mathbf{A} = xz^2\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 3xz\mathbf{k}$ ，$\mathbf{B} = 3xz\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$. ，求 $\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})$ 及 $(\mathbf{A}\times\nabla)\times\mathbf{B}$ 在點（1，−1，2）之値。

答 $\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) = 18\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}$, $(\mathbf{A}\times\nabla)\times\mathbf{B} = 4\mathbf{j} + 76\mathbf{k}$

4.98 證明 $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla v^2 - \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v})$.

4.99 證明 $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$.

4.100 證明 $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A}) - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})$.

4.101 證明 $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})$.

4.102 證明 $\mathbf{A} = (6xy + z^3)\mathbf{i} + (3x^2 - z)\mathbf{j} + (3xz^2 - y)\mathbf{k}$ 爲非旋場，求 ϕ 使得 $\mathbf{A} = \nabla\phi$ 。

答 $\phi = 3x^2y + xz^3 - yz +$ 常數

4.103 證明 $\mathbf{E} = \mathbf{r}/r^2$ 爲非旋場，求 ϕ 使得 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ ，且 $\phi(a) = 0$ ，其中 $a > 0$ 。

答 $\phi = \ln(a/r)$

4.104 若 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 爲非旋，證明 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ 爲管狀向量。

4.105 若 $f(r)$ 可微，證明 $f(r)\mathbf{r}$ 爲非旋。

4.106 是否存在一可微向量函數 $\mathbf{V}$ 使得 (a) $\text{curl}\,\mathbf{V} = \mathbf{r}$, (b) $\text{curl}\,\mathbf{V} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$? 如果有，求 $\mathbf{V}$ 。

答 (a)沒有，(b) $\mathbf{V} = 3x\mathbf{j} + (2y - x)\mathbf{k} + \nabla\phi$ ，其中 ϕ 爲任意二次可微函數。

4.107 證明馬克士威爾方程式

$$\nabla\times\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},\quad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\mathbf{H} = 0,\quad \nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho$$

（式中 ρ 爲 x，y，z 的函數，c 爲光速，假設爲常數）的解爲

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\quad \mathbf{H} = \nabla\times\mathbf{A}$$

其中 $\mathbf{A}$ 和 ϕ 分別稱爲向量位（vector potential）及純量位（scalar potential），滿足方程式

$$(1)\ \nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0,\quad (2)\ \nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho,\quad (3)\ \nabla^2\mathbf{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}$$

4.108 (a)給一並矢式 $\mathbf{\Phi}=\mathbf{ii}+\mathbf{jj}+\mathbf{kk}$，求 $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{r})$ 及 $(\mathbf{r}\cdot\mathbf{\Phi})\cdot\mathbf{r}$。(b)寫作 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{r}$ 是否會引起混淆？(c) $\mathbf{r}\cdot\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{r}=1$ 代表的幾何意義爲何？

圖 (a) $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{r})=(\mathbf{r}\cdot\mathbf{\Phi})\cdot\mathbf{r}=x^2+y^2+z^2$，(b)不會，(c)半徑 1，中心在原點的球。

4.109 (a) 若 $\mathbf{A}=xz\mathbf{i}-y^2\mathbf{j}+yz^2\mathbf{k}$，$\mathbf{B}=2z^2\mathbf{i}-xy\mathbf{j}+y^3\mathbf{k}$，對 $(\mathbf{A}\times\nabla)\mathbf{B}$ 在點 $(1,-1,1)$ 給予一可能的意義。

(b) 是否可能用並矢式寫出 $\mathbf{A}\times(\nabla\mathbf{B})$ 的結果？

圖 (a) $-4\mathbf{ii}-\mathbf{ij}+3\mathbf{ik}-\mathbf{jj}-4\mathbf{ji}+3\mathbf{kk}$

(b) 若作通當的運算的話就可能。

4.110 證明 $\phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在軸旋轉下爲一不變量。

4.111 若 $\mathbf{A}(x,y,z)$ 相對於軸旋轉爲一不變可微向量場，試證在此變換下，(a) div $\mathbf{A}$ 及 (b) curl $\mathbf{A}$ 分別爲不變純量場及不變向量場。

4.112 用 x'，y'，z' 解出 4.38 題中方程組(3)的 x、y、z。

圖 $x=l_{11}x'+l_{21}y'+l_{31}z'$，$y=l_{12}x'+l_{22}y'+l_{32}z'$，$z=l_{13}x'+l_{23}y'+l_{33}z'$

4.113 若 $\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{B}$ 在旋轉下爲不變量，證明 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ 及 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ 也是不變量。

4.114 證明在一旋轉下

$$\nabla=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}=\mathbf{i}'\frac{\partial}{\partial x'}+\mathbf{j}'\frac{\partial}{\partial y'}+\mathbf{k}'\frac{\partial}{\partial z'}=\nabla'$$

4.115 證明拉卜拉士運算子在一旋轉下爲一不變量。

第五章

向量積分

5·1 向量常積分

令 $\mathbf{R}(u)=R_1(u)\mathbf{i}+R_2(u)\mathbf{j}+R_3(u)\mathbf{k}$ 爲由單一純量變數 u 所決定的向量，其中 $R_1(u)$，$R_2(u)$，$R_3(u)$ 假設在一指定區域中連續。則

$$\int \mathbf{R}(u)\,du = \mathbf{i}\int R_1(u)\,du + \mathbf{j}\int R_2(u)\,du + \mathbf{k}\int R_3(u)\,du$$

稱爲 $\mathbf{R}(u)$ 的不定積分（indefinite integral）。如果存在一個向量 $\mathbf{S}(u)$，使得 $\mathbf{R}(u)=\dfrac{d}{du}(\mathbf{S}(u))$，則

$$\int \mathbf{R}(u)\,du = \int \frac{d}{du}(\mathbf{S}(u))\,du = \mathbf{S}(u)+\mathbf{c}$$

其中 $\mathbf{c}$ 爲一與 u 無關的任意常向量。此時，介於上下限 $u=a$ 與 $u=b$ 之間的定積分（definite integral）可寫成

$$\int_a^b \mathbf{R}(u)\,du = \int_a^b \frac{d}{du}(\mathbf{S}(u))\,du = \mathbf{S}(u)+\mathbf{c}\Big|_a^b = \mathbf{S}(b)-\mathbf{S}(a)$$

這個積分也可以用類似於基本微積分的方法將它定義爲一個和的極限。

5-2 線積分

令 $\mathbf{r}(u)=x(u)\mathbf{i}+y(u)\mathbf{j}+z(u)\mathbf{k}$定義了一條連接點 P_1 和 P_2 的曲線 C，其中 $\mathbf{r}(u)$ 爲 (x,y,z) 的位置向量，而 P_1，P_2 的位置向量分別爲 $\mathbf{r}(u_1)$，$\mathbf{r}(u_2)$。

我們假設 C 是由有限條有連續導數的曲線所組成。令 $\mathbf{A}(x,y,z)=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$ 爲一沿著 C 有定義且在 C 上連續的位置向量函數。則 $\mathbf{A}$ 沿著 C，由 P_1 至 P_2 切線分量的積分寫作

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz$$

爲線積分(line integral)的一個例子。若**A**爲作用在一沿著C移動之質點上的力**F**，此線積分代表此力所作的功。若C爲一封閉曲線（此處我們假設爲簡單封閉曲線，即此曲線本身在任一處均不自交），則環繞C的積分通常記作

$$\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \oint A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz$$

在氣體動力學或流體力學中，此類積分通常稱爲**A**對於C的循環(circulation)，而**A**代表一流體的速度。

一般來說，凡是要沿一曲線求積分值的積分就稱爲線積分。這種積分可以用和的極限來定義，就像在基本微積分中的積分定義一樣。

對於線積分的求值方法，請參閱習題。

下面的定理十分重要。

定理：若在區域R中各點，$\mathbf{A}=\nabla\phi$。其中R之定義爲$a_1\leq x\leq a_2$，$b_1\leq y\leq b_2$，$c_1\leq z\leq c_2$；且ϕ爲一在R_1爲單值且有連續導數的函數。則

1. $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ 與R中連接P_1與P_2之路徑C無關。

2. 環繞R中任一封閉曲線C，$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=0$。

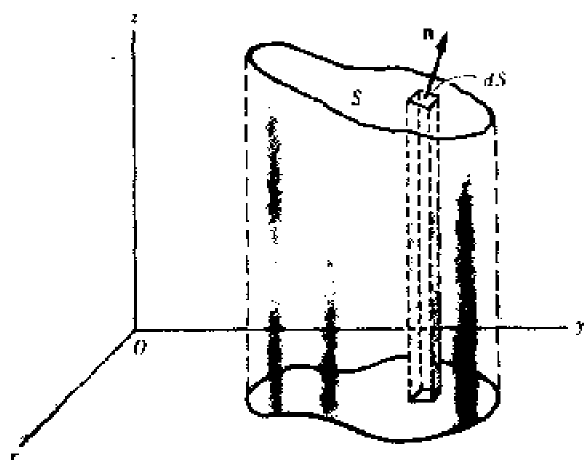
此時**A**稱爲一個保守向量場(conservative vector field)，且ϕ稱爲此保守場的純量位(scalar potential)。

一個向量場**A**爲保守場，若且唯若 $\nabla\times\mathbf{A}=0$，或$\mathbf{A}=\nabla\phi$。此時，$\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=A_1dx+A_2dy+A_3dz=d\phi$，爲一恰當微分，見5.10～5.14題。

5-3 曲面積分

令S爲一雙側曲面(two-sided surface)，如下圖所示。令S的任一側爲正面（若S爲一封閉曲面，我們令外側爲正面）。在S之正面上任一點的單位法向量**n**，我們稱爲正(positive)的單位向量或是向外(outward drawn)的單位法向量。

與曲面面積之微分dS相關的有一個向量$d\mathbf{S}$，其大小等於dS，而方向與**n**的



方向相同。則 $d\mathbf{S}=\mathbf{n}\,dS$ 。積分

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

爲曲面積分的一個例子，稱爲 **A** 在 S 上的通量（flux）。其他的曲面積分還有

$$\iint_S \phi\,dS,\quad \iint_S \phi\,\mathbf{n}\,dS,\quad \iint_S \mathbf{A}\times d\mathbf{S}$$

其中 ϕ 爲一純量函數。此種積分也可以像在基本微積分中一樣，用和的極限來定義（參閱5.17題）。

符號 $\oiint_S$ 通常用來表示在一封閉曲面 S 上的積分。在不會造成混淆的情況下，我們也可以使用 $\oint_S$ 。

要求一個曲面積分值，如果能將它表示成在曲面 S 對一座標平面之投影面積上的二重積分就十分方便了。如果在所選的座標平面上任一垂直線都與曲面最多交於一點，就可以做到這一點。然而，這在實際上並不是問題，因爲我們可以將 S 分割成許多滿足這個限制的曲面。

5.4 體積積分

考慮空間中一封閉曲面，其包含的體積爲 V 。則

$$\iiint_V \mathbf{A}\,dV \quad 和 \quad \iiint_V \phi\,dV$$

為體積積分（volume integral）或空間積分（space integral）的例子。對此種積分的計算，請參閱習題。

習題與解答

5.1 若 $\mathbf{R}(u) = (u-u^2)\mathbf{i} + 2u^3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ 求，(a) $\int \mathbf{R}(u)\,du$，(b) $\int_1^2 \mathbf{R}(u)\,du$.

解 (a)

$$\begin{aligned}\int \mathbf{R}(u)\,du &= \int [(u-u^2)\mathbf{i} + 2u^3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}]\,du \\ &= \mathbf{i}\int (u-u^2)\,du + \mathbf{j}\int 2u^3\,du + \mathbf{k}\int -3\,du \\ &= \mathbf{i}\left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + c_1\right) + \mathbf{j}\left(\frac{u^4}{2} + c_2\right) + \mathbf{k}(-3u + c_3) \\ &= \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right)\mathbf{i} + \frac{u^4}{2}\mathbf{j} - 3u\mathbf{k} + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k} \\ &= \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right)\mathbf{i} + \frac{u^4}{2}\mathbf{j} - 3u\mathbf{k} + \mathbf{c}\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{c}$ 爲常向量 $c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$。

(b) 由 (a)，

$$\begin{aligned}\int_1^2 \mathbf{R}(u)\,du &= \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right)\mathbf{i} + \frac{u^4}{2}\mathbf{j} - 3u\mathbf{k} + \mathbf{c}\,\Big|_1^2 = \left[\left(\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3}\right)\mathbf{i} + \frac{2^4}{2}\mathbf{j} - 3(2)\mathbf{k} + \mathbf{c}\right] - \left[\left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right)\mathbf{i} + \frac{1^4}{2}\mathbf{j} - 3(1)\mathbf{k} + \mathbf{c}\right] \\ &= -\frac{5}{6}\mathbf{i} + \frac{15}{2}\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\end{aligned}$$

另解

$$\begin{aligned}\int_1^2 \mathbf{R}(u)\,du &= \mathbf{i}\int_1^2 (u-u^2)\,du + \mathbf{j}\int_1^2 2u^3\,du + \mathbf{k}\int_1^2 -3\,du \\ &= \mathbf{i}\left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right)\Big|_1^2 + \mathbf{j}\left(\frac{u^4}{2}\right)\Big|_1^2 + \mathbf{k}(-3u)\Big|_1^2 = -\frac{5}{6}\mathbf{i} + \frac{15}{2}\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\end{aligned}$$

5.2 一質點在任一時間 $t \geq 0$ 的加速度爲

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 12\cos 2t\,\mathbf{i} - 8\sin 2t\,\mathbf{j} + 16t\,\mathbf{k}$$

若在 $t=0$ 時的速度 $\mathbf{v}$ 及位移 $\mathbf{r}$ 均爲零，求在任一時間的 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{r}$。

解 積分，

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{i}\int 12\cos 2t\,dt + \mathbf{j}\int -8\sin 2t\,dt + \mathbf{k}\int 16t\,dt \\ &= 6\sin 2t\,\mathbf{i} + 4\cos 2t\,\mathbf{j} + 8t^2\mathbf{k} + \mathbf{c}_1\end{aligned}$$

當 $t=0$ 時，$\mathbf{v}=\mathbf{0}$，所以

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 0\mathbf{k} + \mathbf{c}_1 \quad , \quad \mathbf{c}_1 = -4\mathbf{j}.$$

則

$$\mathbf{v} = 6\sin 2t\,\mathbf{i} + (4\cos 2t - 4)\,\mathbf{j} + 8t^2\,\mathbf{k}$$

所以

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 6\sin 2t\,\mathbf{i} + (4\cos 2t - 4)\,\mathbf{j} + 8t^2\,\mathbf{k}.$$

積分得

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}\int 6\sin 2t\,dt + \mathbf{j}\int(4\cos 2t - 4)\,dt + \mathbf{k}\int 8t^2\,dt$$

$$= -3\cos 2t\,\mathbf{i} + (2\sin 2t - 4t)\,\mathbf{j} + \frac{8}{3}t^3\,\mathbf{k} + \mathbf{c}_2$$

當 $t = 0$ 時，$\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

$$\mathbf{0} = -3\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} + \mathbf{c}_2 \;,\quad \mathbf{c}_2 = 3\mathbf{i}.$$

則

$$\mathbf{r} = (3 - 3\cos 2t)\,\mathbf{i} + (2\sin 2t - 4t)\,\mathbf{j} + \frac{8}{3}t^3\,\mathbf{k}.$$

5.3 求 $\int \mathbf{A}\times\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}\,dt$

答

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right) = \mathbf{A}\times\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{A}\times\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}$$

積分得

$$\int \mathbf{A}\times\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}\,dt = \int\frac{d}{dt}\left(\mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)dt = \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{c}.$$

5.4 一質量爲m之質點P的運動方程式爲

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = f(r)\,\mathbf{r}_1$$

其中$\mathbf{r}$爲由一原點O所測得之P的位置向量，$\mathbf{r}_1$爲在$\mathbf{r}$方向的單位向量，$f(r)$爲由O至P的距離函數。

(a) 證明 $\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{c}$ ，其中$\mathbf{c}$爲一常向量。

(b) 解釋$f(r) < 0$及$f(r) > 0$的物理意義。

(c) 用幾何方法解釋(a)的結果。

(d) 描述此結果與太陽系中行星運動的關係。

答 (a) 在 $m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = f(r)\,\mathbf{r}_1$ 兩邊同時乘上$\mathbf{r}\times$ 。得到

$$m\mathbf{r}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = f(r)\,\mathbf{r}\times\mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$$

由於 $\mathbf{r}$ 與 $\mathbf{r}_1$ 同方向，所以 $\mathbf{r}\times\mathbf{r}_1=\mathbf{0}$。因此，

$$\mathbf{r}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{0} \quad 且 \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}) = \mathbf{0}$$

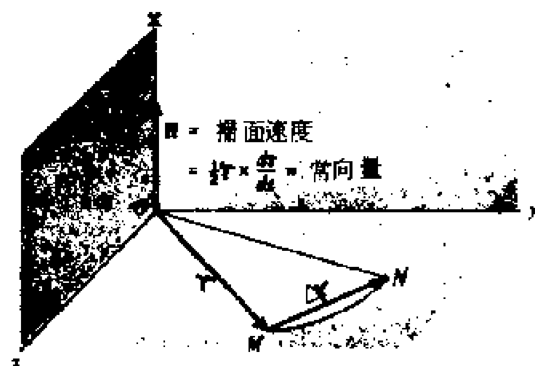
積分得 $\mathbf{r}\times\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{c}$，其中 $\mathbf{c}$ 爲一常向量。（與 5.3 題比較）

(b) 若 $f(r)<0$，加速度 $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ 的方向與 $\mathbf{r}_1$ 相反；因此力的方向直接指向 O，質點一直被吸向 O。

若 $f(r)>0$，力的方向是由 O 向外，質點遭受在 O 的一個排斥力的影響。

若一力直接指向一固定點 O，或由一固定點 O 指向外，並且此力的大小只與至 O 點的距離 r 有關，則稱此力爲一**中心力**（central force）。

(c) 在 Δt 的時間中，質點由 M 移動至 N（見附圖）。在此段時間位置向量所掃過的面積近似於一個以 $\mathbf{r}$ 及 $\Delta\mathbf{r}$ 爲邊之平行四邊形面積的一半，或 $\frac{1}{2}\mathbf{r}\times\Delta\mathbf{r}$。則由位置向量在每單位時間所掃過的近似面積爲 $\frac{1}{2}\mathbf{r}\times\dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$；因此面積的瞬間變率爲



$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}\mathbf{r}\times\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{1}{2}\mathbf{r}\times\mathbf{v}$$

其中 $\mathbf{v}$ 爲質點的瞬間速度。$\mathbf{H}=\frac{1}{2}\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{1}{2}\mathbf{r}\times\mathbf{v}$ 稱爲**掃面速度**（areal velocity），由(a)部分

$$掃面速度 = \mathbf{H} = \frac{1}{2}\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 常向量$$

由於 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{H}=0$，所以此運動爲一平面運動，在上面的圖中我們取此平面爲 xy 平面。

(d) 一行星（例如地球）是依據牛頓萬有引力定律被太陽吸引，此定律是說若二物體的質量分別爲 m 及 M，則其互相吸引之力的大小爲 $F=\frac{GMm}{r^2}$，其中

r 爲兩物之距離，G 爲萬有引力係數。令 m 與 M 分別爲行星及太陽的質量，並選取一以太陽爲原點的座標系。則此行星的運動方程式爲

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{r}_1 \qquad \text{或} \qquad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}\mathbf{r}_1$$

假設忽略其他行星的影響。

依據(c)部分，行星在繞太陽旋轉時其位置向量在一定的時間中掃過相同的面積。此結果與 5.5 題的結論是著名的克卜勒三大定律中的兩條，克卜勒是依據天文學家 Tycho Brahe 所得到的大量數據，再由經驗而導出此三定律。這些定律使得牛頓能夠導出他的萬有引力定律。克卜勒的第三定律請參看 5.36 題。

5.5　證明一行星環繞太陽的路徑爲一以太陽爲一焦點的橢圓。

解　由 5.4 (c)及 5.4 (d)題，

$$(1)\qquad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GM}{r^2}\mathbf{r}_1$$

$$(2)\qquad \mathbf{r}\times\mathbf{v} = 2\mathbf{H} = \mathbf{h}$$

現在 $\mathbf{r}=r\mathbf{r}_1$，$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = r\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{dr}{dt}\mathbf{r}_1$ 所以

$$(3)\qquad \mathbf{h} = \mathbf{r}\times\mathbf{v} = r\mathbf{r}_1\times\left(r\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{dr}{dt}\mathbf{r}_1\right) = r^2\mathbf{r}_1\times\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$$

由(1)，

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}\times\mathbf{h} = -\frac{GM}{r^2}\mathbf{r}_1\times\mathbf{h} = -GM\,\mathbf{r}_1\times\left(\mathbf{r}_1\times\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right)$$
$$= -GM\left[\left(\mathbf{r}_1\cdot\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right)\mathbf{r}_1 - (\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_1)\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right] = GM\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$$

上式用到(3)式及 $\mathbf{r}_1\cdot\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}=0$（3.9 題）的事實。

但是由於 $\mathbf{h}$ 是一個常向量，$\frac{d\mathbf{v}}{dt}\times\mathbf{h} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}\times\mathbf{h})$ 所以

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}\times\mathbf{h}) = GM\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$$

積分得

$$\mathbf{v}\times\mathbf{h} = GM\,\mathbf{r}_1 + \mathbf{p}$$

因此

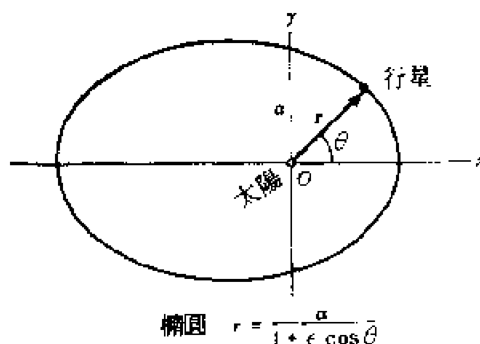
$$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{h}) = GM\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}$$
$$= GMr + r\,\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{p} = GMr + rp\cos\theta$$

其中 $\mathbf{p}$ 為任一大小為 p 的常向量，且 θ 為 $\mathbf{p}$ 與 $\mathbf{r}_1$ 的夾角。

由於 $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{h}) = (\mathbf{r}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{h} = \mathbf{h}\cdot\mathbf{h} = h^2$ 我們有 $h^2 = GMr + rp\cos\theta$ 及

$$r = \frac{h^2}{GM + p\cos\theta} = \frac{h^2/GM}{1+(p/GM)\cos\theta}$$

由解析幾何，一個焦點在原點，離心率為 ϵ 的圓錐曲線，其極方程式為 $r = \dfrac{a}{1+\epsilon\cos\theta}$，其中 a 為常數。將此式與導出的方程式比較，可以看出所要求的軌道為一離心率 $\epsilon = p/GM$ 的圓錐曲線。此軌道為一橢圓、拋物線或是雙曲線就要依據 ϵ 是小於、等於或大於 1 而定。由於行星的軌道是一個封閉曲線，所以它一定是橢圓。



橢圓 $r = \dfrac{a}{1+\epsilon\cos\theta}$

線積分

5.6 若 $\mathbf{A} = (3x^2+6y)\mathbf{i} - 14yz\,\mathbf{j} + 20xz^2\,\mathbf{k}$，求 $\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ 由 (0, 0, 0) 至 (1, 1, 1) 沿著下列路徑 C 之值：

(a) $x = t$，$y = t^2$，$z = t^3$。

(b) 由 (0, 0, 0) 至 (1, 0, 0) 再至 (1, 1, 0) 再到 (1, 1, 1) 的直線路徑。

(c) 由 (0, 0, 0) 至 (1, 1, 1) 的直線路徑。

答

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \left[(3x^2+6y)\mathbf{i} - 14yz\,\mathbf{j} + 20xz^2\mathbf{k}\right]\cdot(dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k})$$
$$= \int_C (3x^2+6y)\,dx - 14yz\,dy + 20xz^2\,dz$$

(a) 若 $x = t$，$y = t^2$，$z = t^3$，點 (0, 0, 0) 及 (1, 1, 1) 分別對應到 $t = 0$ 及 $t = 1$。則

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{t=0}^{1} (3t^2+6t^2)\,dt - 14(t^2)(t^3)\,d(t^2) + 20(t)(t^3)^2\,d(t^3)$$
$$= \int_{t=0}^{1} 9t^2\,dt - 28t^6\,dt + 60t^9\,dt$$
$$= \int_{t=0}^{1} (9t^2 - 28t^6 + 60t^9)\,dt = 3t^3 - 4t^7 + 6t^{10}\Big|_0^1 = 5$$

另解 沿著 C，

$\mathbf{A} = 9t^2\mathbf{i} - 14t^5\mathbf{j} + 20t^7\mathbf{k}$ 且 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ ， $d\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})\,dt$.

則

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{t=0}^{1} (9t^2\mathbf{i} - 14t^5\mathbf{j} + 20t^7\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})\,dt$$

$$= \int_0^1 (9t^2 - 28t^6 + 60t^9)\,dt = 5$$

(b) 沿 (0，0，0) 至 (1，0，0) 的直線，$y=0$，$z=0$，$dy=0$，$dz=0$，而 x 由 0 變動至 1 。則在此段路徑上的積分為

$$\int_{x=0}^{1} (3x^2 + 6(0))\,dx - 14(0)(0)(0) + 20x(0)^2(0) = \int_{x=0}^{1} 3x^2\,dx = x^3\Big|_0^1 = 1$$

沿 (1，0，0) 至 (1，1，0) 的直線，$x=1$，$z=0$，$dx=0$，$dz=0$，而 y 由 0 變動至 1 。則在此段路徑上的積分為

$$\int_{y=0}^{1} (3(1)^2 + 6y)0 - 14y(0)\,dy + 20(1)(0)^2\,0 = 0$$

沿 (1，1，0) 至 (1，1，1) 的直線，$x=1$，$y=1$，$dx=0$，$dy=0$，而 z 由 0 變動至 1 。則在此段路徑上的積分為

$$\int_{z=0}^{1} (3(1)^2 + 6(1))\,0 - 14(1)z(0) + 20(1)z^2\,dz = \int_{z=0}^{1} 20z^2\,dz = \frac{20z^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{20}{3}$$

將三段相加得

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 1 + 0 + \frac{20}{3} = \frac{23}{3}$$

(c) 由 (0，0，0) 至 (1，1，1) 的直線參數方程式為 $x=t$，$y=t$，$z=t$ 。則

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{t=0}^{1} (3t^2 + 6t)\,dt - 14(t)(t)\,dt + 20(t)(t)^2\,dt$$

$$= \int_{t=0}^{1} (3t^2 + 6t - 14t^2 + 20t^3)\,dt = \int_{t=0}^{1} (6t - 11t^2 + 20t^3)\,dt = \frac{13}{3}$$

5.7 求在一力場 $\mathbf{F} = 3xy\mathbf{i} - 5z\mathbf{j} + 10x\mathbf{k}$ 作用下，將一質點沿曲線 $x = t^2 + 1$，$y = 2t^2$，$z = t^3$ 由 $t=1$ 移動至 $t=2$ 所作的功是多少？

解

$$\text{總功} = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C (3xy\,\mathbf{i} - 5z\,\mathbf{j} + 10x\,\mathbf{k})\cdot(dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k})$$

$$= \int_C 3xy\,dx - 5z\,dy + 10x\,dz$$

$$= \int_{t=1}^{2} 3(t^2+1)(2t^2)\,d(t^2+1) - 5(t^3)\,d(2t^2) + 10(t^2+1)\,d(t^3)$$

$$= \int_1^2 (12t^5 + 10t^4 + 12t^3 + 30t^2)\,dt = 303$$

5.8 若 $\mathbf{F} = 3xy\,\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j}$，求 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$。其中 C 為 xy 平面上曲線 $y = 2x^2$ 由 $(0,0)$ 至 $(1,2)$ 部分。

解 由於積分是在 xy 平面上作用（$z = 0$），我們可取 $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$。則

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C (3xy\,\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j})\cdot(dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j})$$

$$= \int_C 3xy\,dx - y^2\,dy$$

解法一 令 $y = 2x^2$ 中的 $x = t$，則 C 的參數方程式為 $x = t$，$y = 2t^2$。點 $(0,0)$ 與 $(1,2)$ 分別對應到 $t = 0$ 及 $t = 1$。則

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{t=0}^{1} 3(t)(2t^2)\,dt - (2t^2)^2\,d(2t^2) = \int_{t=0}^{1} (6t^3 - 16t^5)\,dt = -\frac{7}{6}$$

解法二 直接將 $y = 2x^2$ 代入，其中 x 是由 0 至 1。則

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{x=0}^{1} 3x(2x^2)\,dx - (2x^2)^2\,d(2x^2) = \int_{x=0}^{1} (6x^3 - 16x^5)\,dx = -\frac{7}{6}$$

注意如果沿此曲線相反方向行進，即由 $(1,2)$ 至 $(0,0)$，則積分值會由 $-7/6$ 變為 $7/6$。

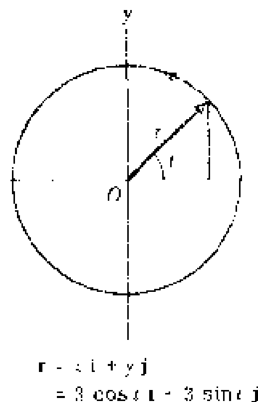
5.9 求將一質點環繞 xy 平面上一圓移動一圈所作的功，若此圓的中心在原點，半徑為 3。而力場已知為

$$\mathbf{F} = (2x - y + z)\mathbf{i} + (x + y - z^2)\mathbf{j} + (3x - 2y + 4z)\mathbf{k}$$

解 在平面 $z = 0$ 中，$\mathbf{F} = (2x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + (3x - 2y)\mathbf{k}$ 且 $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}$，所以所作的功為

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C [(2x-y)\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j}+(3x-2y)\mathbf{k}]\cdot[dx\,\mathbf{i}+dy\,\mathbf{j}]$$
$$= \int_C (2x-y)\,dx + (x+y)\,dy$$

取圓的參數方程式為 $x=3\cos t$，$y=3\sin t$，其中 t 由 0 變動至 2π（參考附圖）。則此線積分等於



$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$
$= 3\cos t\,\mathbf{i} + 3\sin t\,\mathbf{j}$

$$\int_{t=0}^{2\pi} [2(3\cos t)-3\sin t][-3\sin t]\,dt + [3\cos t+3\sin t][3\cos t]\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (9 - 9\sin t\cos t)\,dt$$
$$= 9t - \frac{9}{2}\sin^2 t\Big|_0^{2\pi} = 18\pi$$

在 C 上我們取反時針方向，如圖所示。我們稱此方向為正向，或者說在 C 上以正向行進。若在 C 上以順時針方向（負向）行進，則積分值將會等於 -18π。

5.10 (a) 若 $\mathbf{F}=\nabla\phi$，其中 ϕ 為單值且有連續偏導數，證明將一質點由一點 $P_1=(x_1, y_1, z_1)$ 移動至另一點 $P_2=(x_2, y_2, z_2)$ 所作的功與連接兩點的路徑無關。

(b) 反之，若 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ 與連接兩點的路徑 C 無關，證明存在一函數 ϕ，使得 $\mathbf{F}=\nabla\phi$。

答 (a) 所作的功 $= \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} \nabla\phi\cdot d\mathbf{r}$

$$= \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(dx\,\mathbf{i}+dy\,\mathbf{j}+dz\,\mathbf{k})$$
$$= \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$$
$$= \int_{P_1}^{P_2} d\phi = \phi(P_2)-\phi(P_1) = \phi(x_2,y_2,z_2)-\phi(x_1,y_1,z_1)$$

則此積分只與點 P_1，P_2 有關，而與連接它們的路徑無關。當然，這只有 $\phi(x, y, z)$ 在所有的 P_1 和 P_2 點為單值時才成立。

(b) 令 $\mathbf{F}=F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}$。由假設，$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ 與連接兩點的路徑無關，此二

點我們分別取 (x_1, y_1, z_1) 及 (x, y, z)。則

$$\phi(x,y,z) = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x,y,z)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x,y,z)} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

與連接 (x_1, y_1, z_1) 及 (x, y, z) 的路徑無關。因此

$$\begin{aligned}\phi(x+\Delta x, y, z) - \phi(x,y,z) &= \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x+\Delta x,y,z)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x,y,z)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{(x,y,z)}^{(x_1,y_1,z_1)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x+\Delta x,y,z)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz\end{aligned}$$

由於最後的積分必須與連接 (x, y, z) 及 $(x+\Delta x, y, z)$ 的路徑無關，所以我們可將路徑取為連接此二點的直線，因此 dy 和 dz 爲零。則

$$\frac{\phi(x+\Delta x, y, z) - \phi(x,y,z)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} F_1 dx$$

在兩邊取 $\Delta x \to 0$ 的極限後可得 $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = F_1$。

同理我們可以證得 $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = F_2$，$\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = F_3$。則

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = \nabla\phi.$$

若 $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ 與連接 P_1 及 P_2 的路徑無關，則 $\mathbf{F}$ 稱爲一保守場（conservative field）。因此，若 $\mathbf{F} = \nabla\phi$，則 $\mathbf{F}$ 爲一保守場，反之亦然。

用向量證明 如果此線積分與路徑無關，則

$$\phi(x,y,z) = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x,y,z)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x,y,z)} \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}\,ds$$

利用微分可得

$$\frac{d\phi}{ds} = \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}.\ 但是\ \frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}\text{，所以 } (\nabla\phi - \mathbf{F})\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds} = 0.$$

由於此式對任意$\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$都必須成立，所以$\mathbf{F}=\nabla\phi$。

5.11 (a) 若$\mathbf{F}$爲一保守場，證明 curl $\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{F}=0$（即$\mathbf{F}$爲非旋場）。

(b) 反之，若$\nabla\times\mathbf{F}=0$（即$\mathbf{F}$爲非旋場），證明$\mathbf{F}$爲一保守場。

解 (a) 若$\mathbf{F}$爲一保守場，則由5.10題可知，$\mathbf{F}=\nabla\phi$。

因此 curl $\mathbf{F}=\nabla\times\nabla\phi=0$（見4.27(a)題）。

(b) 若$\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$，則 $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}=\mathbf{0}$ 且因此

$$\frac{\partial F_3}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial z},\quad \frac{\partial F_1}{\partial z}=\frac{\partial F_3}{\partial x},\quad \frac{\partial F_2}{\partial x}=\frac{\partial F_1}{\partial y}$$

我們必須由此證出$\mathbf{F}=\nabla\phi$。

在此力場$\mathbf{F}$中，將一質點由(x_1, y_1, z_1)移動至(x, y, z)所作的功爲

$$\int_C F_1(x,y,z)\,dx+F_2(x,y,z)\,dy+F_3(x,y,z)\,dz$$

式中C爲連接(x_1, y_1, z_1)與(x, y, z)的路徑。我們取一個由(x_1, y_1, z_1)至(x, y_1, z_1)至(x, y, z_1)至(x, y, z)的直線段特殊路徑，並令$\phi(x, y, z)$爲沿此路徑所作的功。則

$$\phi(x,y,z)=\int_{x_1}^{x} F_1(x,y_1,z_1)\,dx+\int_{y_1}^{y} F_2(x,y,z_1)\,dy+\int_{z_1}^{z} F_3(x,y,z)\,dz$$

由此可得

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=F_3(x,y,z)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial y}&=F_2(x,y,z_1)+\int_{z_1}^{z}\frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y,z)\,dz\\&=F_2(x,y,z_1)+\int_{z_1}^{z}\frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z)\,dz=F_2(x,y,z_1)+F_2(x,y,z)\Big|_{z_1}^{z}\\&=F_2(x,y,z_1)+F_2(x,y,z)-F_2(x,y,z_1)=F_2(x,y,z)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=F_1(x,y_1,z_1)+\int_{y_1}^{y}\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z_1)\,dy+\int_{z_1}^{z}\frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y,z)\,dz$$

$$= F_1(x,y_1,z_1) + \int_{y_1}^{y} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z_1)dy + \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z)\,dz$$

$$= F_1(x,y_1,z_1) + F_1(x,y,z_1)\Big|_{y_1}^{y} + F_1(x,y,z)\Big|_{z_1}^{z} = F_1(x,y_1,z_1) + F_1(x,y,z_1)$$

$$- F(x,y_1,z_1) + F_1(x,y,z) - F(x,y,z_1) = F_1(x,y,z)$$

則

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = \nabla\phi.$$

因此一個場 $\mathbf{F}$ 爲保守場的充要條件爲 curl $\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$。

5.12 (a)證明 $\mathbf{F} = (2xy + z^3)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$ 爲一保守力場。(b)求其純量位。(c)求在此力場中將一物由 (1，−2，1) 移至 (3，1，4) 所作的功。

解 (a) 由5.11題，一個力場爲保守場的充要條件爲 curl $\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$。

現在

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^3 & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

所以 $\mathbf{F}$ 爲一保守力場。

(b) **解法一** 由5.10題，

$$\mathbf{F} = \nabla\phi \quad 或 \quad \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = (2xy + z^3)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}.$$

則

$$(1)\ \frac{\partial\phi}{\partial x} = 2xy + z^3 \qquad (2)\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2 \qquad (3)\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = 3xz^2$$

積分後，我們由(1)，(2)，(3)分別可求出

$$\begin{aligned} \phi &= x^2y + xz^3 + f(y,z) \\ \phi &= x^2y + g(x,z) \\ \phi &= xz^3 + h(x,y) \end{aligned}$$

如果我們取 $f(y,z) = 0$，$g(x,z) = xz^3$，$h(x,y) = x^2y$ 上式會一致。所以 $\phi = x^2y + xz^3$，我們也可以把它加上任意常數。

解法二 由於 $\mathbf{F}$ 爲保守場，$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ 與連接 (x_1, y_1, z_1) 及 (x, y, z) 的路徑 C 無關。利用5.11(b)題的方法，

$$\begin{aligned}
\phi(x,y,z) &= \int_{x_1}^{x} (2xy_1+z_1^3)\,dx + \int_{y_1}^{y} x^2\,dy + \int_{z_1}^{z} 3xz^2\,dz \\
&= (x^2y_1+xz_1^3)\Big|_{x_1}^{x} + x^2y\Big|_{y_1}^{y} + xz^3\Big|_{z_1}^{z} \\
&= x^2y_1 + xz_1^3 - x_1^2y_1 - x_1z_1^3 + x^2y - x^2y_1 + xz^3 - xz_1^3 \\
&= x^2y + xz^3 - x_1^2y_1 - x_1z_1^3 = x^2y + xz^3 + \text{常數}
\end{aligned}$$

解法三

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \nabla\phi\cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = d\phi$$

則

$$\begin{aligned}
d\phi = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= (2xy+z^3)\,dx + x^2\,dy + 3xz^2\,dz \\
&= (2xy\,dx + x^2\,dy) + (z^3\,dx + 3xz^2\,dz) \\
&= d(x^2y) + d(xz^3) = d(x^2y+xz^3)
\end{aligned}$$

得 $\phi = x^2y + xz^3 + \text{常數}$。

(c) 所作之功 $= \displaystyle\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$

$$\begin{aligned}
&= \int_{P_1}^{P_2} (2xy+z^3)\,dx + x^2\,dy + 3xz^2\,dz \\
&= \int_{P_1}^{P_2} d(x^2y+xz^3) = x^2y+xz^3\Big|_{P_1}^{P_2} = x^2y+xz^3\Big|_{(1,-2,1)}^{(3,1,4)} = 202
\end{aligned}$$

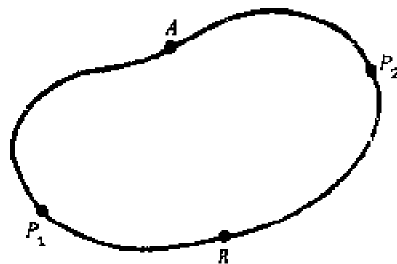
另解 由(b)部分，

$$\phi(x,y,z) = x^2y + xz^3 + \text{常數}$$

所以所作之功 $= \phi(3,1,4) - \phi(1,-2,1) = 202$.

13 證明若 $\displaystyle\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ 在一區域中與連接任二點 P_1，P_2 的路徑無關，則對此區域中的所有封閉路徑 $\displaystyle\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$，反之亦然。

圖 令 $P_1AP_2BP_1$（見附圖）為一封閉曲線，則



$$\begin{aligned}
\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{P_1AP_2BP_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{P_2BP_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}
\end{aligned}$$

$$= \int_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{P_1BP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$$

因爲由假設可知沿著路徑 A 由 P_1 至 P_2 的積分與沿著路徑 B 的積分相同。

反之，若 $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$，則

$$\int_{P_1AP_2BP_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{P_2BP_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{P_1BP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$$

所以，

$$\int_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1BP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

5.14 (a) 若 $\mathbf{F}=F_1\,\mathbf{i}+F_2\,\mathbf{j}+F_3\,\mathbf{k}$，證明 $F_1\,dx+F_2\,dy+F_3\,dz$ 爲恰當微分的一個充要條件爲 $\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$。

(b) 證明 $(y^2z^3\cos x-4x^3z)\,dx + 2z^3y\sin x\,dy + (3y^2z^2\sin x-x^4)\,dz$ 爲某一函數 ϕ 的恰當微分，並求 ϕ。

解 (a) 假設 $F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz = d\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}dy + \dfrac{\partial\phi}{\partial z}dz$，爲一恰當微分，則由於 x，y，z 均爲自變數，所以

$$F_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad F_3 = \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

因此 $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k} = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = \nabla\phi$ 所以 $\nabla\times\mathbf{F} = \nabla\times\nabla\phi = \mathbf{0}$.

反之，若 $\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$，則由5.11題，$\mathbf{F}=\nabla\phi$ 所以 $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\nabla\phi\cdot d\mathbf{r}=d\phi$，即 $F_1\,dx+F_2\,dy+F_3\,dz=d\phi$ 爲一恰當微分。

(b) 由 $\mathbf{F} = (y^2z^3\cos x - 4x^3z)\mathbf{i} + 2z^3y\sin x\,\mathbf{j} + (3y^2z^2\sin x - x^4)\mathbf{k}$ 及 $\nabla\times\mathbf{F}$ 計算得爲零，所以由(a)部分可知

$$(y^2z^3\cos x - 4x^3z)\,dx + 2z^3y\sin x\,dy + (3y^2z^2\sin x - x^4)\,dz = d\phi$$

利用 5.12 題中任一種方法可求得 $\phi = y^2z^3\sin x - x^4z +$ 常數。

5.15 令 $\mathbf{F}$ 爲一保守力場，且 $\mathbf{F}=-\nabla\phi$。假設有一質量固定爲 m 的質點在此力場中運動。若 A 和 B 爲空間中任二點，試證

$$\phi(A) + \tfrac{1}{2}mv_A^2 = \phi(B) + \tfrac{1}{2}mv_B^2$$

其中 v_A 與 v_B 分別爲質點在 A，B 兩點速度的大小。

解

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \qquad 則 \qquad \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = m\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2.$$

積分得，

$$\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \frac{m}{2}v^2\Big|_A^B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2.$$

若

$$\mathbf{F} = -\nabla\phi, \quad \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_A^B \nabla\phi\cdot d\mathbf{r} = -\int_A^B d\phi = \phi(A) - \phi(B).$$

則

$$\phi(A) - \phi(B) = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \quad 得證。$$

$\phi(A)$ 稱爲在 A 點的位能（potential energy），而 $\frac{1}{2}mv_A^2$ 稱爲在 A 點的動能（kinetic energy）。此結果說明在 A 點的總能量等於在 B 點的總能量（能量守恆）。注意在 $\mathbf{F} = -\nabla\phi$ 中負號的使用。

5.16 若 $\phi = 2xyz^2$，$\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$，且 C 爲曲線 $x = t^2$，$y = 2t$，$z = t^3$ 由 $t = 0$ 至 $t = 1$。求線積分 (a) $\int_C \phi\, d\mathbf{r}$，(b) $\int_C \mathbf{F}\times d\mathbf{r}$.

解 (a) 沿著 C，

$$\phi = 2xyz^2 = 2(t^2)(2t)(t^3)^2 = 4t^9,$$
$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k},$$

且

$$d\mathbf{r} = (2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})\,dt.$$

則

$$\int_C \phi\, d\mathbf{r} = \int_{t=0}^1 4t^9(2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})\,dt$$
$$= \mathbf{i}\int_0^1 8t^{10}\,dt + \mathbf{j}\int_0^1 8t^9\,dt + \mathbf{k}\int_0^1 12t^{11}\,dt = \frac{8}{11}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

(b) 沿著 C，$\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k} = 2t^3\mathbf{i} - t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$.

$$\mathbf{F}\times d\mathbf{r} = (2t^3\mathbf{i} - t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k})\times(2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})\,dt$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2t^3 & -t^3 & t^4 \\ 2t & 2 & 3t^2 \end{vmatrix} dt = [(-3t^5 - 2t^4)\mathbf{i} + (2t^5 - 6t^5)\mathbf{j} + (4t^3 + 2t^4)\mathbf{k}]\,dt$$

故

$$\int_C \mathbf{F}\times d\mathbf{r} = \mathbf{i}\int_0^1 (-3t^5-2t^4)\,dt + \mathbf{j}\int_0^1 (-4t^5)\,dt + \mathbf{k}\int_0^1 (4t^3+2t^4)\,dt$$

$$= -\frac{9}{10}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{7}{5}\mathbf{k}$$

曲面積分

5.17 用和的極限給予在曲面 S 上，積分 $\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$ 一個定義。

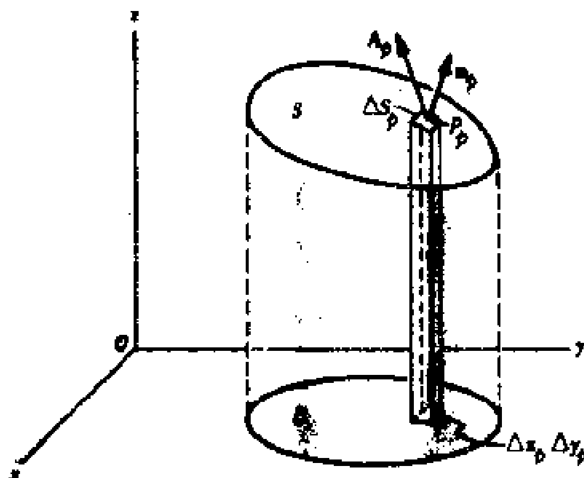
解 將 S 分割成 M 塊區域 ΔS_p，$p=1,2,\cdots,M$。在 ΔS_p 中任取一點 P_p，其座標爲 (x_p, y_p, z_p)。定義 $\mathbf{A}(x_p, y_p, z_p)=\mathbf{A}_p$。令 $\mathbf{n}_p$ 爲 ΔS_p 在 P_p 點的正單位法向量，建立一和

$$\sum_{p=1}^{M} \mathbf{A}_p\cdot\mathbf{n}_p\,\Delta S_p$$

式中 $\mathbf{A}_p\cdot\mathbf{n}_p$ 爲 $\mathbf{A}_p$ 在 P_p 的法向分量。

現在取此和在 $M\to\infty$ 時的極限，此時最大的 ΔS_p 面積趨近於 0。若此極限存在，則稱其爲 $\mathbf{A}$ 在 S 上的法向分量的曲面積分，並記作

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$$



5.18 假設曲面 S 在 xy 平面上的投影爲 R（參閱5.17題之圖）。證明

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_R \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\frac{dx\,dy}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|}$$

由 5.17 題，此曲面積分為和

$$\sum_{p=1}^{N} \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{n}_p \Delta S_p \tag{1}$$

的極限。ΔS_p 在 xy 平面上的投影為 $|(\mathbf{n}_p \Delta S_p)\cdot \mathbf{k}|$ 或 $|\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{k}|\Delta S_p$，其等於 $\Delta x_p \Delta y_p$，所以 $\Delta S_p = \dfrac{\Delta x_p \Delta y_p}{|\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{k}|}$。因此和(1)變成

$$\sum_{p=1}^{N} \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{n}_p \frac{\Delta x_p \Delta y_p}{|\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{k}|} \tag{2}$$

由微積分基本定理，此和在$M\to\infty$的極限（此時最大的 Δx_p，Δy_p 趨近於 0）為

$$\iint_R \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,\frac{dx\,dy}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|}$$

得證。

嚴格的說，$\Delta S_p = \dfrac{\Delta x_p \Delta y_p}{|\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{k}|}$ 這個結果只是近似正確。但是在更精密的檢視時，它們兩者的差為比 $\Delta x_p \Delta y_p$ 更高次的微小量，因此，(1)和(2)的極限事實上可證得相等。

5.19　求 $\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$，其中 $\mathbf{A} = 18z\,\mathbf{i} - 12\,\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$，$S$ 為平面 $2x+3y+6z=12$ 在第一卦限的部分。

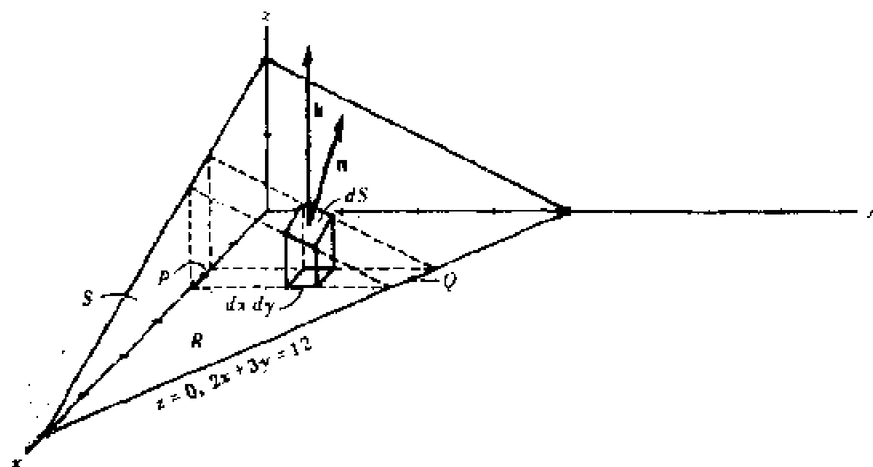


圖 曲面S及其在xy平面的投影R如圖所示。

由5.17題，

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iint_R \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\frac{dx\,dy}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|}$$

要求$\mathbf{n}$，我們注意$\nabla(2x+3y+6z)=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k}$是一個與曲面$2x+3y+6z=12$垂直的向量（4.5題）。則在$S$上任一點的一個單位法向量爲

$$\mathbf{n} = \frac{2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k}}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}} = \frac{2}{7}\mathbf{i}+\frac{3}{7}\mathbf{j}+\frac{6}{7}\mathbf{k}$$

因此

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} = \left(\frac{2}{7}\mathbf{i}+\frac{3}{7}\mathbf{j}+\frac{6}{7}\mathbf{k}\right)\cdot\mathbf{k} = \frac{6}{7} \quad 所以 \quad \frac{dx\,dy}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|} = \frac{7}{6}dx\,dy.$$

同時

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = (18z\,\mathbf{i}-12\mathbf{j}+3y\,\mathbf{k})\cdot\left(\frac{2}{7}\mathbf{i}+\frac{3}{7}\mathbf{j}+\frac{6}{7}\mathbf{k}\right) = \frac{36z-36+18y}{7} = \frac{36-12x}{7}$$

由S的方程式可得 $z=\dfrac{12-2x-3y}{6}$，因此

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_R \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\frac{dx\,dy}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|} = \iint_R \left(\frac{36-12x}{7}\right)\frac{7}{6}\,dx\,dy = \iint_R (6-2x)\,dx\,dy$$

要求這個在R上的二重積分，我們將x保持固定，對y由$y=0$（上圖中的P點）積分至$y=\dfrac{12-2x}{3}$（上圖中的Q點）；再對x由$x=0$積分至$x=6$。這樣就可以涵蓋整個R。此時積分變成

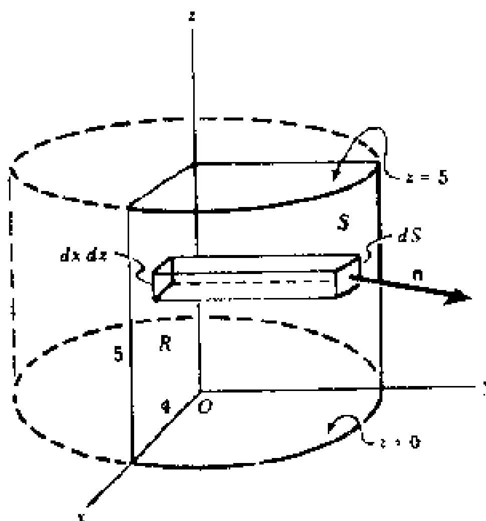
$$\int_{x=0}^{6}\int_{y=0}^{(12-2x)/3}(6-2x)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{6}\left(24-12x+\frac{4x^2}{3}\right)dx = 24$$

如果我們取與上圖相反方向的向量爲正向單位法向量$\mathbf{n}$，我們得到的結果就會變成-24。

5.20 若$\mathbf{A}=z\,\mathbf{i}+x\,\mathbf{j}-3y^2z\,\mathbf{k}$，$S$爲圓柱面$x^2+y^2=16$在第一卦限中介於$z=0$至$z=5$部分的曲面，求$\displaystyle\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$。

圖 S在xz平面上的投影R，如附圖所示。注意在此時我們不能用S在xy平面的投影來做。則

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_R \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\frac{dx\,dz}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}|}$$



$x^2+y^2=16$ 上的一個法向量爲 $\nabla(x^2+y^2)=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}$。因此在右圖中，$S$ 的單位法向量爲

$$\mathbf{n} = \frac{2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2}} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{4}$$

（因爲在 S 上，$x^2+y^2=16$。）

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = (z\mathbf{i}+x\mathbf{j}-3y^2z\mathbf{k})\cdot\left(\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{4}\right) = \frac{1}{4}(xz+xy)$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{j} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{4}\cdot\mathbf{j} = \frac{y}{4}$$

則所要求的曲面積分等於

$$\iint_R \frac{xz+xy}{y}\,dx\,dz = \int_{z=0}^{5}\int_{x=0}^{4}\left(\frac{xz}{\sqrt{16-x^2}}+x\right)dx\,dz = \int_{z=0}^{5}(4z+8)\,dz = 90$$

5.21 若 $\phi=\frac{3}{8}xyz$，S 同 5.20 題，求 $\iint_S \phi\mathbf{n}\,dS$。

解 我們知道

$$\iint_S \phi\mathbf{n}\,dS = \iint_R \phi\mathbf{n}\frac{dx\,dz}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}|}$$

同 5.20 題，取 $\mathbf{n}=\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{4}$，$\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}=\frac{y}{4}$，右邊的積分變成

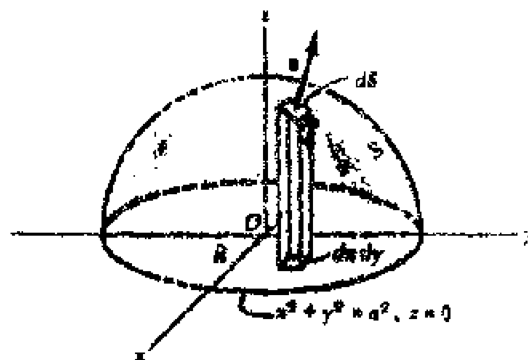
$$\iint_R \frac{3}{8}xz(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})\,dx\,dz = \frac{3}{8}\int_{z=0}^{5}\int_{x=0}^{4}(x^2z\mathbf{i}+xz\sqrt{16-x^2}\,\mathbf{j})\,dx\,dz$$

$$= \frac{3}{8}\int_{z=0}^{5}\left(\frac{64}{3}z\mathbf{i}+\frac{64}{3}z\mathbf{j}\right)dz = 100\mathbf{i}+100\mathbf{j}$$

5.22 若 $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+(x-2xz)\mathbf{j}-xy\mathbf{k}$，$S$ 爲球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在 xy 平面之上的半球曲面，求 $\iint_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$。

答

$$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & x-2xz & -xy\end{vmatrix}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}-2z\mathbf{k}$$



$x^2+y^2+z^2=a^2$ 的一個法向量爲

$$\nabla(x^2+y^2+z^2)=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$$

則在圖上的單位法向量 $\mathbf{n}$ 爲

$$\mathbf{n}=\frac{2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}=\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{a}$$

上式用到 $x^2+y^2+z^2=a^2$。

S 在 xy 平面上的投影 R 的邊界爲圓 $x^2+y^2=a^2$，$z=0$（見圖）。則

$$\iint_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS=\iint_R(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\frac{dx\,dy}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|}$$

$$=\iint_R(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}-2z\mathbf{k})\cdot\left(\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{a}\right)\frac{dx\,dy}{z/a}$$

$$=\int_{x=-a}^{a}\int_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{3(x^2+y^2)-2a^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dy\,dx$$

最後一式用到 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的事實。要求此二重積分，我們將其轉換成極座標 (ρ,ϕ)，$x=\rho\cos\phi$，$y=\rho\sin\phi$，而 $dy\,dx$ 用 $\rho\,d\rho\,d\phi$ 取代。則此二重積分變爲

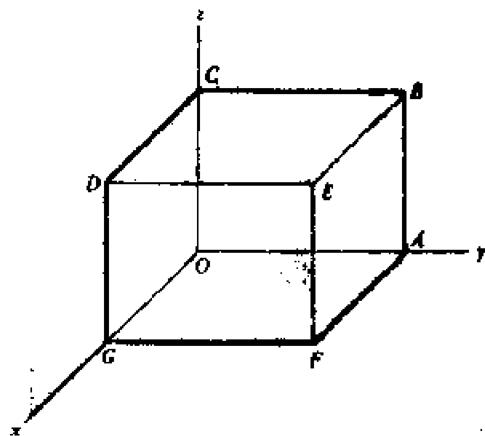
$$\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{a}\frac{3\rho^2-2a^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\,d\rho\,d\phi=\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{a}\frac{3(\rho^2-a^2)+a^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\,d\rho\,d\phi$$

$$=\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{a}\left(-3\rho\sqrt{a^2-\rho^2}+\frac{a^2\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\right)d\rho\,d\phi$$

$$=\int_{\phi=0}^{2\pi}\left[(a^2-\rho^2)^{3/2}-a^2\sqrt{a^2-\rho^2}\Big|_{\rho=0}^{a}\right]d\phi$$

$$=\int_{\phi=0}^{2\pi}(a^3-a^3)\,d\phi=0$$

5.23 若 $\mathbf{F}=4xz\,\mathbf{i}-y^2\,\mathbf{j}+yz\,\mathbf{k}$，$S$ 爲由 $x=0$，$x=1$，$y=0$，$y=1$，$z=0$，$z=1$ 所圍成的正立方體表面，求 $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$。



解 在 $DEFG$ 面：$\mathbf{n}=\mathbf{i}$，$x=1$，則

$$\iint_{DEFG} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_0^1\int_0^1 (4z\,\mathbf{i}-y^2\,\mathbf{j}+yz\,\mathbf{k})\cdot\mathbf{i}\,dy\,dz$$
$$= \int_0^1\int_0^1 4z\,dy\,dz = 2$$

在 $ABCO$ 面：$\mathbf{n}=-\mathbf{i}$，$x=0$，則

$$\iint_{ABCO} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_0^1\int_0^1 (-y^2\,\mathbf{j}+yz\,\mathbf{k})\cdot(-\mathbf{i})\,dy\,dz = 0$$

在 $ABEF$ 面：$\mathbf{n}=\mathbf{j}$，$y=1$，則

$$\iint_{ABEF} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_0^1\int_0^1 (4xz\,\mathbf{i}-\mathbf{j}+z\,\mathbf{k})\cdot\mathbf{j}\,dx\,dz = \int_0^1\int_0^1 -dx\,dz = -1$$

在 $OGDC$ 面：$\mathbf{n}=-\mathbf{j}$，$y=0$，則

$$\iint_{OGDC} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_0^1\int_0^1 (4xz\,\mathbf{i})\cdot(-\mathbf{j})\,dx\,dz = 0$$

在 $BCDE$ 面：$\mathbf{n}=\mathbf{k}$，$z=1$，則

$$\iint_{BCDE} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_0^1\int_0^1 (4x\,\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k})\cdot\mathbf{k}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 y\,dx\,dy = \tfrac{1}{2}$$

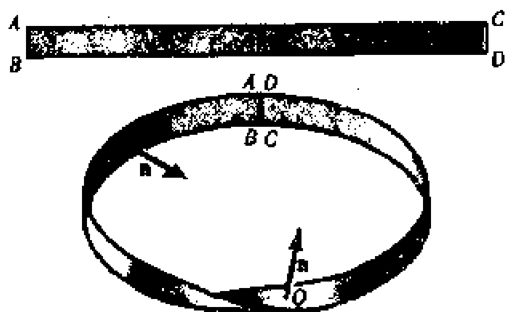
在 $AFGO$ 面：$\mathbf{n} = -\mathbf{k}$，$z = 0$，則

$$\iint_{AFGO} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_0^1\int_0^1 (-y^2\,\mathbf{j})\cdot(-\mathbf{k})\,dx\,dy = 0$$

加總後得

$$\iint_{S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = 2 + 0 + (-1) + 0 + \tfrac{1}{2} + 0 = \frac{3}{2}.$$

5.24 在處理曲面積分時，我們只限制在曲面爲雙側曲面的時候。試舉一個非雙側曲面的例子。



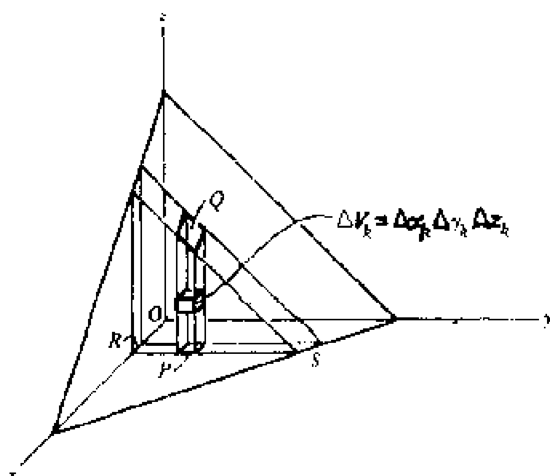
解 取一紙條 $ABCD$ 如右圖所示。將紙帶扭轉，使點 A 和點 D，點 B 和點 C 重合，如右下圖所示。若 $\mathbf{n}$ 爲此曲面上任一點 P 的正向法線。當 $\mathbf{n}$ 繞曲面移動時，我們發現當它再到 P 點時，$\mathbf{n}$ 的方向與原來的方向相反。如果我們試圖將此曲面的單面着色，則我們會發現整個紙帶都被着色了。這種曲面稱爲莫氏帶（Moebius strip），爲單側曲面的一個例子。有時候我們也稱它爲**不可定向曲面**（non-orientable surface），而稱雙側曲面爲**可定向曲面**（orientable surface）。

體積積分

5.25 令 $\phi = 45x^2y$，且令 V 代表由平面 $4x + 2y + z = 8$，$x = 0$，$y = 0$ 及 $z = 0$ 所包圍的封閉區域。(a)將 $\iiint_V \phi\,dV$ 表示成一個和的極限，(b)求(a)中的積分值。

解 (a) 如圖所示，將 V 分割成 M 塊體積各爲 $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$ $k = 1, 2, \ldots, M$ 的正立方體，並令 (x_k, y_k, z_k) 爲各立方體中的一點。定義 $\phi(x_k, y_k, z_k) = \phi_k$。對此區域中所有可能的正立方體，考慮和

(1) $$\sum_{k=1}^{M} \phi_k \Delta V_k$$



當$M \to \infty$時，即最大的 ΔV_k 趨近於0時，此和的極限我們記作 $\iiint_V \phi \, dV$ 。我們可以證明，若ϕ在V上連續，則此極限與我們分割的方式無關。

在取此區域中所有可能正立方體以形成和(1)時，以按次序的方式進行是比較好的。有一種可能就是先將包含在一柱體（如上圖中的PQ）中的所有體積元加總。此時，x_k與y_k保持固定，僅需將所有的 z_k 加總。其次，我們讓x_k固定，將所有的y_k加總。這相當於將包含於厚板RS中所有像PQ的這種柱體加總，也就是將包含在RS中所有的可能正立方體加總。最後，改變x_k。這相當於將所有像RS的這種厚板加總。

在上面的過程中，提供的求和方法，是先取所有的z_k，然後再對y_k，最後對x_k加總。然而，我們顯然可用任一種次序來求和。

(b) 在(a)中所提供之求和法所包含的概念，可以用來求積分值。先將 x，y 保持不變，對z由$z=0$（柱體PQ的底）積分至$z=8-4x-2y$（柱體PQ的頂）。然後將x保持固定，對y積分。這相當於將底落在xy平面上由R（此處$y=0$）至S（此處$4x+2y=8$或$y=4-2x$）的所有柱體相加，因此積分是由$y=0$積至$y=4-2x$。最後，我們將所有平行於yz平面的厚板相加，這就相當於由$x=0$積分至$x=2$。因此，積分可以寫成

$$\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{4-2x}\int_{z=0}^{8-4x-2y} 45x^2y \, dz \, dy \, dx = 45\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{4-2x} x^2y(8-4x-2y) \, dy \, dx$$

$$= 45\int_{x=0}^{2} \frac{1}{3}x^2(4-2x)^3 \, dx = 128$$

注意：在物理上，此結果可解釋成區域V的質量，其中密度ϕ依公式ϕ ·

$45x^2y$ 變化。

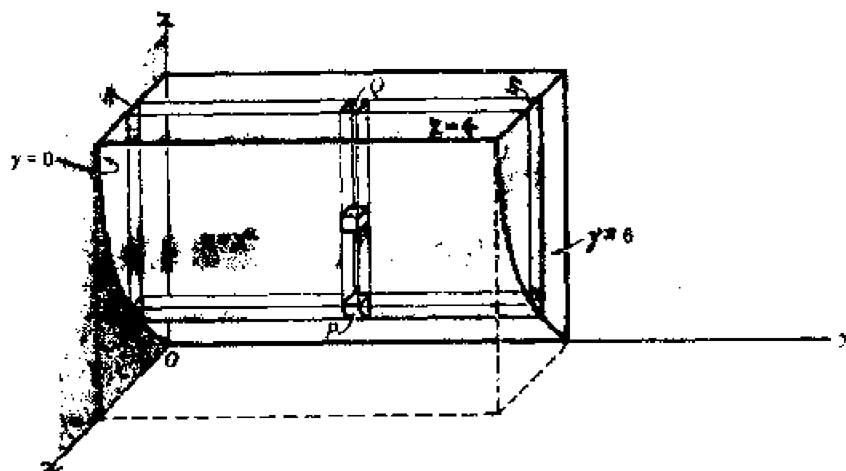
5.26 令 $\mathbf{F}=2xz\mathbf{i}-x\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$，$V$ 爲由曲面 $x=0$，$y=0$，$y=6$，$z=x^2$ 及 $z=4$ 所包圍的區域，求 $\iiint_V \mathbf{F}\,dV$ 之値。

解 下面的積分步驟可涵蓋區域 V：(a)保持 x，y 固定，由 $z=x^2$ 積分至 $z=4$（由柱體 PQ 的底至頂），(b)再令 x 固定，由 $y=0$ 積分至 $y=6$（由厚板的 R 至 S），(c)最後由 $x=0$ 積分至 $x=2$（$z=x^2$ 與 $z=4$ 的相交處）。則所求之積分爲

$$\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4}(2xz\,\mathbf{i}-x\,\mathbf{j}+y^2\,\mathbf{k})\,dz\,dy\,dx$$

$$=\mathbf{i}\int_0^2\int_0^6\int_{x^2}^4 2xz\,dz\,dy\,dx-\mathbf{j}\int_0^2\int_0^6\int_{x^2}^4 x\,dz\,dy\,dx+\mathbf{k}\int_0^2\int_0^6\int_{x^2}^4 y^2\,dz\,dy\,dx$$

$$=128\,\mathbf{i}-24\,\mathbf{j}+384\,\mathbf{k}$$



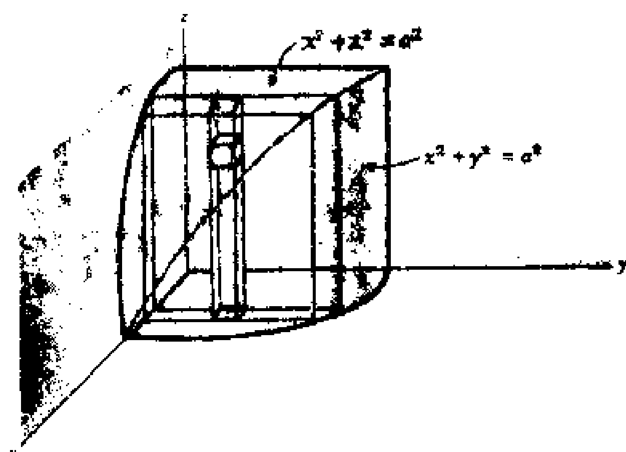
5.27 求圓柱 $x^2+y^2=a^2$ 與 $x^2+z^2=a^2$ 所相交的共同區域體積。

解

所求之體積 = 下圖所示區域體積的 8 倍

$$=8\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}dz\,dy\,dx$$

$$=8\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2}\,dy\,dx=8\int_{x=0}^{a}(a^2-x^2)\,dx=\frac{16a^3}{3}$$



補充題

5.28　若 $\mathbf{R}(t)=(3t^2-t)\mathbf{i}+(2-6t)\mathbf{j}-4t\,\mathbf{k}$ 求 (a) $\int \mathbf{R}(t)\,dt$ 及 (b) $\int_2^4 \mathbf{R}(t)\,dt$.

答　(a) $(t^3-t^2/2)\mathbf{i}+(2t-3t^2)\mathbf{j}-2t^2\mathbf{k}+\mathbf{c}$　(b) $50\mathbf{i}-32\mathbf{j}-24\mathbf{k}$

5.29　求 $\int_0^{\pi/2}(3\sin u\,\mathbf{i}+2\cos u\,\mathbf{j})\,du$

答　$3\mathbf{i}+2\mathbf{j}$

5.30　若 $\mathbf{A}(t)=t\,\mathbf{i}-t^2\mathbf{j}+(t-1)\mathbf{k}$，$\mathbf{B}(t)=2t^2\mathbf{i}+6t\,\mathbf{k}$，求 (a) $\int_0^2 \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\,dt$, (b) $\int_0^2 \mathbf{A}\times\mathbf{B}\,dt$.

答　(a) 12　(b) $-24\mathbf{i}-\frac{40}{3}\mathbf{j}+\frac{64}{5}\mathbf{k}$

5.31　令 $\mathbf{A}=t\,\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2t\,\mathbf{k}$, $\mathbf{B}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{C}=3\mathbf{i}+t\,\mathbf{j}-\mathbf{k}$，求 (a) $\int_1^2 \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}\,dt$, (b) $\int_1^2 \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\,dt$.

答　(a) 0　(b) $-\frac{87}{2}\mathbf{i}-\frac{44}{3}\mathbf{j}+\frac{15}{2}\mathbf{k}$

5.32　一質點在任一時間 $t\geqq 0$ 的加速度 $\mathbf{a}$ 爲 $\mathbf{a}=e^{-t}\mathbf{i}-6(t+1)\mathbf{j}+3\sin t\,\mathbf{k}$。若在 $t=0$ 時，速度 $\mathbf{v}$ 及位移 $\mathbf{r}$ 均爲零，求在任一時間的 $\mathbf{v}$ 及 $\mathbf{r}$。

答　$\mathbf{v}=(1-e^{-t})\mathbf{i}-(3t^2+6t)\mathbf{j}+(3-3\cos t)\mathbf{k}$,　$\mathbf{r}=(t-1+e^{-t})\mathbf{i}-(t^3+3t^2)\mathbf{j}+(3t-3\sin t)\mathbf{k}$

5.33　一物體在任一時間 $t\geqq 0$ 的加速度 $\mathbf{a}$ 爲 $\mathbf{a}=-g\,\mathbf{j}$，其中 g 爲一常數。在 $t=0$ 時，速度 $\mathbf{v}=v_0\cos\theta_0\,\mathbf{i}+v_0\sin\theta_0\,\mathbf{j}$，位移 $\mathbf{r}=0$。求在任一時間的 $\mathbf{v}$ 及 $\mathbf{r}$。這描述了一個與正 x 軸成 θ_0 角度的大砲，以大小爲 v_0 的初速度發射一砲彈的運動。

答　$\mathbf{v}=v_0\cos\theta_0\,\mathbf{i}+(v_0\sin\theta_0-gt)\mathbf{j}$,　$\mathbf{r}=(v_0\cos\theta_0)t\,\mathbf{i}+\left[(v_0\sin\theta_0)t-\frac{1}{2}gt^2\right]\mathbf{j}$

5.34　求 $\int_2^3 \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt}\,dt$ 若 $\mathbf{A}(2)=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$，$\mathbf{A}(3)=4\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$

答 10

5.35 若一質點沿路徑 $\mathbf{r}=a\cos\omega t\,\mathbf{i}+b\sin\omega t\,\mathbf{j}$ 運動，a，b，ω 為常數，t 為時間。求其掃面速度。

答 $\frac{1}{2}ab\omega\mathbf{k}$

5.36 證明一行星繞太陽運動的週期平方，與其橢圓軌跡之主軸長度的立方成正比。（克卜勒第三定律）

5.37 若 $\mathbf{A}=(2y+3)\mathbf{i}+xz\,\mathbf{j}$　　$-x)\mathbf{k}$，求 $\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ 沿下列曲線 C 之值：

(a) $x=2t^2$，$y=t$，$z=t^3$ 由 $t=0$ 至 $t=1$。

(b) 由（0，0，0）至（0，0，1），再至（0，1，1），然後至（2，1，1）的直線路徑。

(c) 連接（0，0，0）與（2，1，1）的直線。

答 (a) 288/35　(b) 10　(c) 8

5.38 若 $\mathbf{F}=(5xy-6x^2)\mathbf{i}+(2y-4x)\mathbf{j}$，$C$ 為 xy 平面中，$y=x^3$ 由點（1，1）至（2，8）的的一段曲線。求 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$。

答 35

5.39 若 $\mathbf{F}=(2x+y)\mathbf{i}+(3y-x)\mathbf{j}$，$C$ 為 xy 平面中由（0，0）至（2，0）再到（3，2）的直線段。求 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$。

答 11

5.40 求在力場 $\mathbf{F}=3x^2\mathbf{i}+(2xz-y)\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 中將一物體沿下列曲線移動所作的功。

(a) 由（0，0，0）至（2，1，3）的直線。

(b) 空間曲線 $x=2t^2$，$y=t$，$z=4t^2-t$，由 $t=0$ 至 $t=1$。

(c) 曲線 $x^2=4y$，$3x^3=8z$，由 $x=0$ 至 $x=2$。

答 (a) 16　(b) 14.2　(c) 16

5.41 若 $\mathbf{F}=(x-3y)\mathbf{i}+(y-2x)\mathbf{j}$，$C$ 為 xy 平面上 $x=2\cos t$，$y=3\sin t$，由 $t=0$ 至 $t=2\pi$ 的封閉曲線。求 $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$。

答 6π，若 C 以正向（反時針方向）行進

5.42 若 $\mathbf{T}$ 為曲線 C：$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u)$ 上的單位切向量，證明在一力場 $\mathbf{F}$ 中沿 C 移動一質點所作的功為 $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$，其中 s 為弧長。

5.43 若 $\mathbf{F}=(2x+y^2)\mathbf{i}+(3y-4x)\mathbf{j}$，求 $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$，其中$C$爲圖 1 中的三角形(a)在所示方向，(b)與所示方向相反。

答 (a) $-14/3$ (b) $14/3$

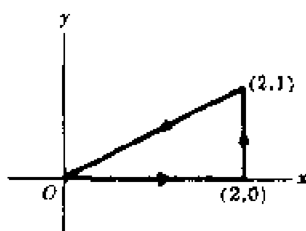


圖 1

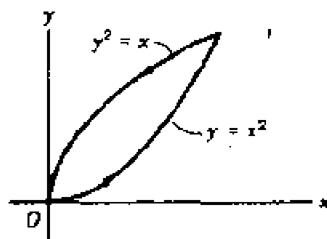


圖 2

5.44 若 $\mathbf{A}=(x-y)\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j}$，$C$爲圖 2 中的封閉曲線，方向如圖所示，求 $\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$。

答 $2/3$

5.45 若 $\mathbf{A}=(y-2x)\mathbf{i}+(3x+2y)\mathbf{j}$，計算$\mathbf{A}$以正向繞 xy 平面上一中心在原點，半徑爲 2 之圓C所產生之循環。

答 8π

5.46 (a) 若 $\mathbf{A}=(4xy-3x^2z^2)\mathbf{i}+2x^2\mathbf{j}-2x^3z\mathbf{k}$，證明 $\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ 與連接兩給定點之曲線C無關。

(b) 證明存在一可微函數ϕ，使得$\mathbf{A}=\nabla\phi$，並求出ϕ。

答 (b) $\phi=2x^2y-x^3z^2+$常數

5.47 (a) 證明 $\mathbf{F}=(y^2\cos x+z^3)\mathbf{i}+(2y\sin x-4)\mathbf{j}+(3xz^2+2)\mathbf{k}$ 爲一保守力場。

(b) 求$\mathbf{F}$的純量位。

(c) 求在此力場中，將一物體由$(0,1,-1)$移動至$(\pi/2,-1,2)$所作的功。

答 (b) $\phi=y^2\sin x+xz^3-4y+2z+$常數 (c) $15+4\pi$

5.48 證明$\mathbf{F}=r^2\mathbf{r}$爲一保守場，並求其純量位。

答 $\phi=\dfrac{r^4}{4}+$常數

5.49 判別 $\mathbf{F}=2xz\mathbf{i}+(x^2-y)\mathbf{j}+(2z-x^2)\mathbf{k}$ 是否爲保守場。

答 非保守場

5.50 證明不論力場是否爲保守場，將一質點由A移動至B所作的功等於在此二點動能的變化。

5.51 若 $\mathbf{A}=(yz+2x)\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+(xy+2z)\mathbf{k}$，求沿曲線$x^2+y^2=1$，$z=1$，由正向自$(0,1,1)$至$(1,0,1)$之 $\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$。

答 1

5.52 (a)若$\mathbf{E}=r\mathbf{r}$，是否存在一函數ϕ，使得$\mathbf{E}=-\nabla\phi$？如果存在，求出ϕ。(b)若C為任意簡單封閉曲線，求$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$。

答 (a) $\phi=-\dfrac{r^3}{3}$+常數 (b) 0

5.53 證明$(2x\cos y+z\sin y)\,dx+(xz\cos y-x^2\sin y)\,dy+x\sin y\,dz$為一恰當微分。再由此解微分方程式$(2x\cos y+z\sin y)\,dx+(xz\cos y-x^2\sin y)\,dy+x\sin y\,dz=0$。

答 $x^2\cos y+xz\sin y$＝常數

5.54 解 (a) $(e^{-y}+3x^2y^2)\,dx+(2x^3y-xe^{-y})\,dy=0$,

(b) $(z-e^{-x}\sin y)\,dx+(1+e^{-x}\cos y)\,dy+(x-8z)\,dz=0$.

答 (a) $xe^{-y}+x^3y^2$＝常數 (b) $xz+e^{-x}\sin y+y-4z^2$＝常數

5.55 若$\phi=2xy^2z+x^2y$，求$\int_C \phi\,d\mathbf{r}$，其中C

(a) 為曲線$x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$，由$t=0$至$t=1$。

(b) 包含由(0，0，0)至(1，0，0)再到(1，1，0)再到(1，1，1)的直線段。

答 (a) $\frac{19}{45}\mathbf{i}+\frac{11}{15}\mathbf{j}+\frac{75}{77}\mathbf{k}$ (b) $\frac{1}{2}\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

5.56 求$\mathbf{F}=2y\mathbf{i}-z\mathbf{j}+x\mathbf{k}$，求$\int_C \mathbf{F}\times d\mathbf{r}$沿曲線$x=\cos t$，$y=\sin t$，$z=2\cos t$，由$t=0$至$t=\pi/2$之值。

答 $(2-\frac{\pi}{4})\mathbf{i}+(\pi-\frac{1}{2})\mathbf{j}$

5.57 若$\mathbf{A}=(3x+y)\mathbf{i}-x\mathbf{j}+(y-2)\mathbf{k}$，$\mathbf{B}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$，求$\oint_C (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times d\mathbf{r}$以正向繞$xy$平面上，圓心在原點，半徑為2之圓的值。

答 $4\pi(7\mathbf{i}+3\mathbf{j})$

5.58 在下列情況，求$\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$。

(a) $\mathbf{A}=y\mathbf{i}+2x\mathbf{j}-z\mathbf{k}$，$S$為平面$2x+y=6$在第一卦限中被平面$z=4$所切割的部分。

(b) $\mathbf{A}=(x+y^2)\mathbf{i}-2x\mathbf{j}+2yz\mathbf{k}$，$S$為平面$2x+y+2z=6$在第一卦限的部分。

答 (a) 108 (b) 81

5.59 若$\mathbf{F}=2y\mathbf{i}-z\mathbf{j}+x^2\mathbf{k}$，$S$為拋物柱面$y^2=8x$在第一卦限被平面$y=4$及$z=4$

所切出的部分，求 $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$ 。

答 132

5.60 若 S 爲由圓柱面 $x^2+z^2=9$，$x=0$，$y=0$，$z=0$ 及 $y=8$ 所包圍之區域的表面，$\mathbf{A}=6z\,\mathbf{i}+(2x+y)\,\mathbf{j}-x\,\mathbf{k}$，求 $\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$ 之值。

答 18π

5.61 若 S 爲(a)由座標平面及平面 $x=1$，$y=1$，$z=1$ 所包圍之單位正立方體的表面，(b)中心在 $(0,0,0)$，半徑爲 a 的球面，求 $\iint_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,dS$ 。

答 (a) 3 (b) $4\pi a^3$

5.62 若 S 爲在 xy 平面之上，被錐面 $z^2=x^2+y^2$ 及平面 $z=4$ 所包圍之區域的表面，$\mathbf{A}=4xz\,\mathbf{i}+xyz^2\,\mathbf{j}+3z\,\mathbf{k}$，求 $\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$ 。

答 320π

5.63 (a) 令 R 爲曲面 S 在 xy 平面上的投影，若 S 的方程式爲 $z=f(x,y)$，證明 S 的面積爲 $\iint_R \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$ 。

(b) 若 S 的方程式爲 $F(x,y,z)=0$，則其面積爲何？

答 $$\iint_R \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|}\,dx\,dy$$

5.64 求平面 $x+2y+2z=12$ 被(a) $x=0$，$y=0$，$x=1$，$y=1$；(b) $x=0$，$y=0$，及 $x^2+y^2=16$，所切割出的曲面面積。

答 (a) $3/2$ (b) 6π

5.65 求圓柱 $x^2+y^2=a^2$ 與 $x^2+z^2=a^2$ 相交的曲面面積。

答 $16a^2$

5.66 若 $\mathbf{F}=(x+2y)\,\mathbf{i}-3z\,\mathbf{j}+x\,\mathbf{k}$，$\phi=4x+3y-2z$，且 S 爲曲面 $2x+y+2z=6$ 被 $x=0$，$x=1$，$y=0$ 及 $y=2$ 所圍之部分。求 (a) $\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$ 及 (b) $\iint_S \phi\,\mathbf{n}\,dS$ 。

答 (a) 1 (b) $2\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

5.67 若 S 爲曲面 $2x+y+2z=6$ 被 $x=0$，$y=0$ 及 $z=0$ 所包圍的區域，重作上題。

答 (a) $9/2$ (b) $72\mathbf{i}+36\mathbf{j}+72\mathbf{k}$

5.68 若 R 爲 xy 平面上被 $x^2+y^2=36$ 所圍的區域，求 $\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ 。

答 144π

5.69 求 $\iiint_V (2x-y)\,dV$，其中 V 爲由柱面 $z=4-x^2$ 及平面 $x=0$，$y=0$，$y=2$，$z=0$ 所包圍之封閉區域。

答 $80/3$

5.70 若 $\mathbf{F}=(2x^2-3z)\mathbf{i}-2xy\,\mathbf{j}-4x\,\mathbf{k}$，求 (a) $\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV$ 及 (b) $\iiint_V \nabla\times\mathbf{F}\,dV$，其中 V 爲由平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 及 $2x+2y+z=4$ 所包圍的封閉區域。

答 (a) $\frac{8}{3}$ (b) $\frac{8}{3}(\mathbf{j}-\mathbf{k})$

第六章
散度定理，司托克士定理及相關的積分定理

6-1 高斯散度定理

高斯散度定理(the divergence theorem of Gauss) 敍述若V爲被一封閉曲面S所包圍的體積，$\mathbf{A}$爲一有連續導數的位置向量函數，則

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV = \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS = \oiint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

式中$\mathbf{n}$爲S上的正向(向外)法向量。

6-2 司托克士定理

司托克士定理(Stoke's theorem) 敍述若S爲被一封閉不相交曲線(簡單封閉曲線)C所包圍的開雙側曲面，且若$\mathbf{A}$有連續導數，則

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}$$

式中係以正向沿C行進。所謂C的正向是指若有一觀察者在S的邊界上行進，他的頭指向S的正法線方向，而曲面S在他的左邊。

6-3 平面中的葛忍定理

若R爲xy平面中被一個簡單封閉曲線C所包圍的封閉區域，且若M與N爲x，y的連續函數，且在R中有連續導數，則

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

其中C以正向(反時針方向)行進。除非另有說明，我們假設$\oint$代表沿正向積分。

平面中的葛忍定理是司托克士定理的一個特例(見6-4題)。同時，我們亦應注

意，高斯散度定理其實是革忍定理的一個推廣，只是革忍定理中的（平面）區域**R**及其封閉邊界（曲線）C 被散度定理中的（空間）區域 V 及其邊界（曲面）S 所取代。因此，我們有時候也將散度定理稱為**空間中的革忍定理**(Green's theorem in space)，請參閱6.4題。

平面中的革忍定理對由有限多個不相交的簡單封閉曲線所包圍的區域也成立（見6.10及6.11題）。

6-4 相關的積分定理

1. $$\iiint_V [\phi\nabla^2\psi + (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi)]\, dV = \iint_S (\phi\nabla\psi)\cdot d\mathbf{S}$$

 此式稱為**革忍第一恒等式或定理**(Green's first identity or theorem)。

2. $$\iiint_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\, dV = \iint_S (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi)\cdot d\mathbf{S}$$

 此式稱為**革忍第二恒等式或對稱定理**(Green's second identity or symmetrical theorem)，見6.21題。

3. $$\iiint_V \nabla\times\mathbf{A}\, dV = \iint_S (\mathbf{n}\times\mathbf{A})\, dS = \iint_S d\mathbf{S}\times\mathbf{A}$$

 注意在上式中，高斯散度定理的點積被叉積取代了，見6.23題。

4. $$\oint_C \phi\, d\mathbf{r} = \iint_S (\mathbf{n}\times\nabla\phi)\, dS = \iint_S d\mathbf{S}\times\nabla\phi$$

5. 在下列二式中，ψ 代表一向量函數或純量函數，由符號"$\circ$"代表點積、叉積或一般乘法而定。

$$\iiint_V \nabla\circ\psi\, dV = \iint_S \mathbf{n}\circ\psi\, dS = \iint_S d\mathbf{S}\circ\psi$$

$$\oint_C d\mathbf{r}\circ\psi = \iint_S (\mathbf{n}\times\nabla)\circ\psi\, dS = \iint_S (d\mathbf{S}\times\nabla)\circ\psi$$

高斯散度定理、司托克士定理及上面的3、4均為此二式的特例，見6.22，6.23及6.34題。

6-5 ∇ 形成的積分運算子

很有趣地，利用 6.19 題的術語，運算子 ∇ 可以用符號表示成

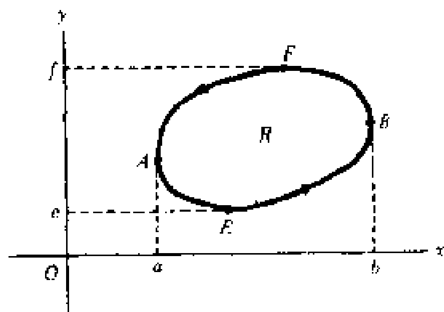
$$\nabla \circ = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_{\Delta S} d\mathbf{S} \circ$$

其中"∘"代表點積，叉積或一般乘法（見 6.25 題）。這個結果在將梯度、散度及旋度的觀念推廣到非直角座標系時非常有用（見 6.19，6.24 題及第七章）。

習題與解答

平面中的革忍定理

6.1 若 C 爲一平面封閉曲線，且任一與座標軸平行的直線均至多與 C 交於兩點，證明平面中的革忍定理。



解 令曲線 AEB 及 AFB（見附圖）的方程式分別爲 $y = Y_1(x)$ 及 $y = Y_2(x)$。若 R 爲 C 所包圍的區域，則

$$\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{x=a}^{b}\left[\int_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\,dy\right]dx = \int_{x=a}^{b} M(x,y)\Big|_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)}\,dx = \int_a^b \Big[M(x,Y_2) - M(x,Y_1)\Big]\,dx$$

$$= -\int_a^b M(x,Y_1)\,dx - \int_b^a M(x,Y_2)\,dx = -\oint_C M\,dx$$

因此，

$$(1) \qquad \oint_C M\,dx = -\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\,dy$$

同理，我們令曲線 EAF 及 EBF 的方程式分別爲 $x = X_1(y)$ 及 $x = X_2(y)$。則

$$\iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{y=e}^{f}\left[\int_{x=X_1(y)}^{X_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\right]dy = \int_e^f \Big[N(X_2,y) - N(X_1,y)\Big]\,dy$$

$$= \int_f^e N(X_1,y)\,dy + \int_e^f N(X_2,y)\,dy = \oint_C N\,dy$$

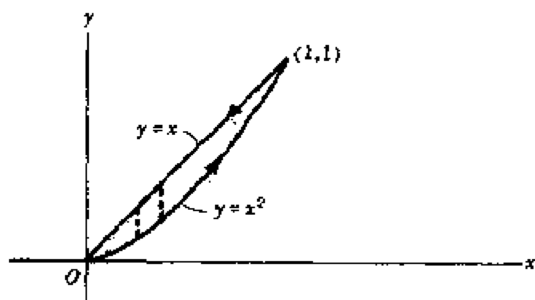
因此，

$$(2) \quad \oint_C N\,dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy$$

將(1)和(2)相加，

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

6.2 用 $\oint_C (xy+y^2)\,dx + x^2\,dy$ 證實平面中的革忍定理，其中 C 爲由 $y=x$ 及 $y=x^2$ 所包圍區域的封閉邊界曲線。



解 $y=x$ 與 $y=x^2$ 交於點 $(0,0)$ 及 $(1,1)$。在 C 上的正向如附圖所示。

沿著 $y=x^2$，線積分等於

$$\int_0^1 \left((x)(x^2)+x^4\right) dx + (x^2)(2x)\,dx = \int_0^1 (3x^3+x^4)\,dx = \frac{19}{20}$$

沿著 $y=x$ 由 $(1,1)$ 至 $(0,0)$ 的線積分等於

$$\int_1^0 \left((x)(x)+x^2\right) dx + x^2\,dx = \int_1^0 3x^2\,dx = -1$$

所以所要求的線積分 $= \frac{19}{20} - 1 = -\frac{1}{20}$.

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy+y^2)\right] dx\,dy$$

$$= \iint_R (x-2y)\,dx\,dy = \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^x (x-2y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int_{x^2}^x (x-2y)\,dy\right] dx = \int_0^1 (xy-y^2)\Big|_{x^2}^x\,dx$$

$$= \int_0^1 (x^4-x^3)\,dx = -\frac{1}{20}$$

故定理得證。

6.3 將 6.1 題中對平面中革忍定理的證明推廣至平行座標軸的直線可交曲線 C 超過兩點的曲線 C。

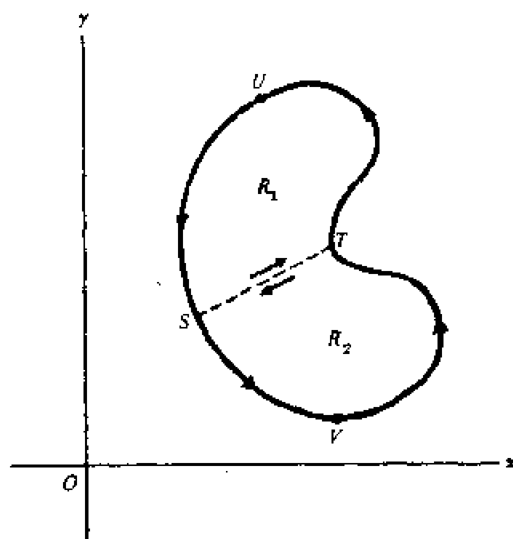


圖　考慮如附圖所示的封閉曲線，此時與座標軸平行的直線可能與曲線交於兩點以上。我們可作一線 ST，將此區域分割成兩個滿足定理 1 之條件的區域 R_1 及 R_2，革忍定理在此二區域成立，即

$$(1)\quad \int_{STUS} M\,dx + N\,dy = \iint_{R_1}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$(2)\quad \int_{SVTS} M\,dx + N\,dy = \iint_{R_2}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dx\,dy$$

將(1)，(2)的左邊相加後，利用 $\int_{ST} = -\int_{TS}$ 的事實可得（省略 $M\,dx+N\,dy$）：

$$\int_{STUS}+\int_{SVTS} = \int_{ST}+\int_{TUS}+\int_{SVT}+\int_{TS} = \int_{TUS}+\int_{SVT} = \int_{TUSVT}$$

將(1)，(2)的右邊相加後可得（省略被積函數）：

$$\iint_{R_1} + \iint_{R_2} = \iint_{R}$$

其中 R 是由 R_1 與 R_2 組成。則

$$\int_{TUSVT} M\,dx + N\,dy = \iint_{R}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dx\,dy$$

因此定理得證。

像本題及 6.1 題所考慮的區域 R，在其內部的任一封閉曲線都可以連續地縮小到一個點而不會離開 R，這種區域我們稱爲**簡單連通區域**（simply-connected region）。一個非簡單連通區域，稱爲**複連通**（multiply-connected）區域。我們在本題中已證明了對任一由封閉曲線所包圍的簡單連通區域均適用平面革忍定理。在 6.10 題中我們會將此定理推廣至複連通區域。

對更複雜的簡單連通區域，我們只要再多作幾條像 ST 這樣的直線，就可以證明出此定理了。

6.4　用向量符號來表示平面中的革忍定理。

解　若 $\mathbf{A}=M\mathbf{i}+N\mathbf{j}$，$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$，則 $d\mathbf{r}=dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}$，且 $M\,dx+N\,dy=(M\mathbf{i}+N\mathbf{j})\cdot(dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j})=\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$。

同時，若 $\mathbf{A}=M\mathbf{i}+N\mathbf{j}$，則

$$\nabla\times\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ M&N&0\end{vmatrix}=-\frac{\partial N}{\partial z}\mathbf{i}+\frac{\partial M}{\partial z}\mathbf{j}+\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

所以

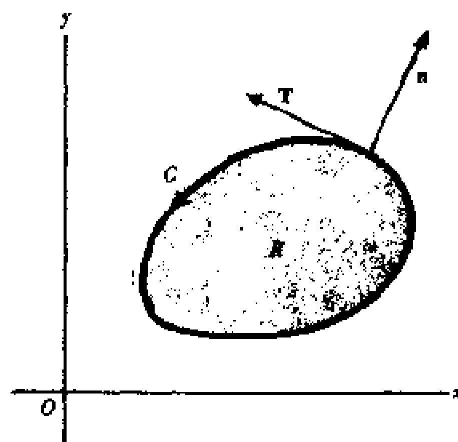
$$(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{k}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}.$$

因此平面中的革忍定理可以寫成

$$\oint_C\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=\iint_R(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{k}\,dR$$

其中 $dR=dx\,dy$。

將此式推廣到一個以曲線 C 爲邊界的曲面 S，可以很自然地導出司托克士定理，我們將在 6.31 題證明此定理。



另解　同上，$M\,dx+N\,dy=\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}ds=\mathbf{A}\cdot\mathbf{T}\,ds$，其中 $\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\mathbf{T}=C$ 上的切向量（參閱附圖）。若 $\mathbf{n}$ 爲 C 上的向外單位法向量，則 $\mathbf{T}=\mathbf{k}\times\mathbf{n}$，所以

$$M\,dx+N\,dy=\mathbf{A}\cdot\mathbf{T}\,ds=\mathbf{A}\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{n})\,ds=(\mathbf{A}\times\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}\,ds$$

由於 $\mathbf{A}=M\mathbf{i}+N\mathbf{j}$, $\mathbf{B}=\mathbf{A}\times\mathbf{k}=(M\mathbf{i}+N\mathbf{j})\times\mathbf{k}=N\mathbf{i}-M\mathbf{j}$ ，且 $\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=\nabla\cdot\mathbf{B}$，所以平面中的革忍定理變成

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_R \nabla\cdot\mathbf{B}\,dR$$

其中 $dR=dx\,dy$。

若將此式推廣，封閉曲線 C 的弧長微分 ds 用一個封閉曲面 S 的表面積微分 dS 取代，並將對應的由 C 所包圍之區域 R 用由 S 所包圍的體積 V 取代，則可導出高斯散度定理或空間中的革忍定理。

$$\iint_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{B}\,dV$$

6.5 對第 6.4 題中第一個結果，給予一物理解釋。

圖 若 $\mathbf{A}$ 表示作用於一質點的力場，則 $\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ 代表將此質點沿一封閉路徑 C 移動一圈所作的功，其值由 $\nabla\times\mathbf{A}$ 決定。由此可知，若特別地，$\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{0}$ 即若 $\mathbf{A}=\nabla\phi$ ，則沿此封閉路徑的積分爲 0 。這也就相當於說，在此力場中將一質點移動至另一點所作的功與連接兩點的路徑無關，即此力場爲一保守場。對空間中的曲線及力場，我們早已證明過此結果了（第 5 章）。

反之，若此積分與某一區域中連接任二點的路徑無關，即若繞任一封閉曲線的積分均爲零，則 $\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{0}$。在平面中，若 $\mathbf{A}=M\mathbf{i}+N\mathbf{j}$ ，則條件 $\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{0}$ 與條件 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ 等價。

6.6 求 $\int_{(0,0)}^{(2,1)}(10x^4-2xy^3)\,dx-3x^2y^2\,dy$ 沿路徑 $x^4-6xy^3=4y^2$ 之值。

圖 直接去計算此式相當困難。但是我們注意到 $M=10x^4-2xy^3$ ，$N=-3x^2y^2$ ，且 $\frac{\partial M}{\partial y}=-6xy^2=\frac{\partial N}{\partial x}$，由此可知此積分與路徑無關。因此，我們可以利用任何路徑，例如取最簡單的路徑即由（0，0）到（2，0）到由（2，0）到（2，1）的直線路徑。

沿著由（0，0）到（2，0）的直線路徑，積分等於 $\int_{x=0}^{2}10x^4\,dx=64$。

沿著由（2，0）到（2，1）的直線路徑，積分等於 $\int_{y=0}^{1}-12y^2\,dy=-4$。

則所要求的線積分值 $= 64 - 4 = 60$。

另解 由於 $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$，所以 $(10x^4 - 2xy^3)dx - 3x^2y^2dy$ 爲 $2x^5 - x^2y^3$ 的恰當微分。則

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} (10x^4 - 2xy^3)\,dx - 3x^2y^2\,dy = \int_{(0,0)}^{(2,1)} d(2x^5 - x^2y^3) = 2x^5 - x^2y^3 \Big|_{(0,0)}^{(2,1)} = 60$$

6.7 證明由簡單封閉曲線 C 所包圍的面積爲 $\frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$。

解 在革忍定理中，令 $M = -y$，$N = x$，則

$$\oint_C x\,dy - y\,dx = \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right) dx\,dy = 2\iint_R dx\,dy = 2A$$

其中 A 爲所要求的面積，所以 $A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$。

6.8 求橢圓 $x = a\cos\theta$，$y = a\sin\theta$ 之面積。

解

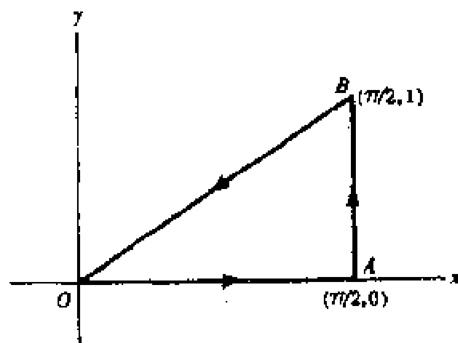
$$\text{面積} = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos\theta)(b\cos\theta)\,d\theta - (b\sin\theta)(-a\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,d\theta = \pi ab$$

6.9 求 $\oint_C (y - \sin x)\,dx + \cos x\,dy$ 其中 C 爲附圖之三角形。

(a) 直接去求。

(b) 利用革忍定理去求。



解 (a) 沿著 OA，$y = 0$，$dy = 0$，且積分等於

$$\int_0^{\pi/2} (0-\sin x)dx + (\cos x)(0) = \int_0^{\pi/2} -\sin x\,dx = \cos x\Big|_0^{\pi/2} = -1$$

沿著AB，$x=\frac{\pi}{2}$，$dx=0$且積分等於

$$\int_0^1 (y-1)0 + 0dy = 0$$

沿著BO，$y=\frac{2x}{\pi}$，$dy=\frac{2}{\pi}dx$且積分等於

$$\int_{\pi/2}^0 (\frac{2x}{\pi}-\sin x)dx + \frac{2}{\pi}\cos x\,dx = (\frac{x^2}{\pi}+\cos x+\frac{2}{\pi}\sin x)\Big|_{\pi/2}^0 = 1-\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}$$

則沿C的積分 $= -1+0+1-\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi} = -\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}$.

(b) $M=y-\sin x$, $N=\cos x$, $\frac{\partial N}{\partial x}=-\sin x$, $\frac{\partial M}{\partial y}=1$ 且

$$\oint_C M\,dx+N\,dy = \iint_R (\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y})\,dx\,dy = \iint_R (-\sin x-1)\,dy\,dx$$

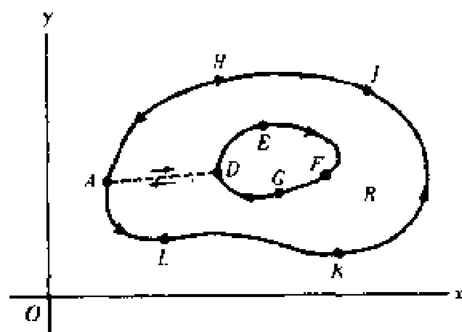
$$= \int_{x=0}^{\pi/2}\left[\int_{y=0}^{2x/\pi}(-\sin x-1)\,dy\right]dx = \int_{x=0}^{\pi/2}(-y\sin x-y)\Big|_0^{2x/\pi}dx$$

$$= \int_0^{\pi/2}(-\frac{2x}{\pi}\sin x-\frac{2x}{\pi})\,dx = -\frac{2}{\pi}(-x\cos x+\sin x)-\frac{x^2}{\pi}\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{\pi}-\frac{\pi}{4}$$

與(a)部分一致。

注意雖然在此題中，存在一些與座標軸平行的直線（此題中的x軸）與C交於無限多點，革忍定理仍然成立。一般來說，當C是由有限條直線段所組成時，革忍定理成立。

6.10 證明平面中的革忍定理對如附圖所示的複連通區域R也成立。



解 在附圖中所示的陰影區域R為一複連通區域，因為並不是在R中的每一條封閉曲線都可以收縮至一點而不會離開R，例如圖中的曲線$DEFGD$就是一個例子。R的邊界，包含外面的邊界$AHJKLA$及裏面的邊界$DEFGD$

、都是以正向行進，所以若一個人在此邊界上以此方向前進。則此區域永遠在在他的左邊。圖中所示的方向，即爲此邊界的正向。

爲了證實革忍定理，我們建立一條直線如 AD，稱爲橫切線（cross-cut），連接內邊界與外邊界。由 $ADEFGDALKJHA$ 所包圍的區域爲一簡單連通區域，所以在此區域革忍定理成立，則

$$\oint_{ADEFGDALKJHA} M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

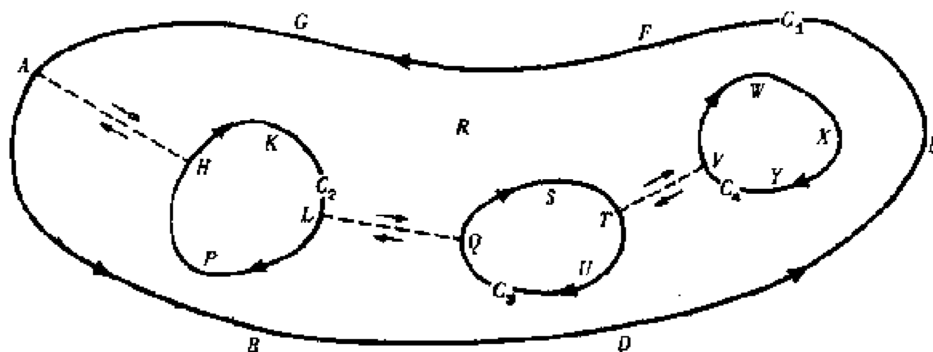
但是左邊的積分（略去被積函數），由於 $\int_{AD} = -\int_{DA}$，所以等於

$$\int_{AD} + \int_{DEFGD} + \int_{DA} + \int_{ALKJHA} = \int_{DEFGD} + \int_{ALKJHA}$$

因此，若 C_1 爲曲線 $ALKJHA$，C_2 爲曲線 $DEFGD$，且 C 爲 R 的邊界（由 C_1 及 C_2 組成）均以正向行進，則 $\int_{C_1} + \int_{C_2} = \int_C$，且因此

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

6.11　證明平面中的革忍定理對下圖中的區域 R 成立。其邊界是由四條簡單封閉曲線 $C_1(ABDEFGA)$, $C_2(HKLPH)$, $C_3(QSTUQ)$ 及 $C_4(VWXYV)$ 所組成。



解　建立橫切線 AH，LQ 及 TV。則由曲線 $AHKLQSTVWXYVTUQLPH$-$ABDEFGA$ 所包圍的區域爲一簡單連通區域，因此革忍定理成立。在此邊界上的積分等於

$$\int_{AH} + \int_{HKL} + \int_{LQ} + \int_{QST} + \int_{TV} + \int_{VWXYV} + \int_{VT} + \int_{TUQ} + \int_{QL} + \int_{LPH} + \int_{HA} + \int_{ABDEFGA}$$

由於沿著AH和HA，LQ和QL，TV和VT的積分可成對消去，上式變為

$$\int_{HKL} + \int_{QST} + \int_{VWXYV} + \int_{TUQ} + \int_{LPH} + \int_{ABDEFGA}$$

$$= \left(\int_{HKL} + \int_{LPH}\right) + \left(\int_{QST} + \int_{TUQ}\right) + \int_{VWXYV} + \int_{ABDEFGA}$$

$$= \int_{HKLPH} + \int_{QSTUQ} + \int_{VWXYV} + \int_{ABDEFGA}$$

$$= \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} + \int_{C_1} = \int_C$$

其中C為由C_1，C_2，C_3及C_4組成的邊界，則

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

得證。

6.12 證明在一簡單連通區域中環繞每一封閉曲線C，$\oint_C M\,dx + N\,dy = 0$的充要條件為在此區域中的任一點，$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$。

解 假設在由C所包圍之區域R中任一點，M與N均為連續且有連續偏導數，則在此區域格林定理適用，故

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

若在R中$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$，則很明顯地，$\oint_C M\,dx + N\,dy = 0$。

反之，假設對所有的曲線C，$\oint_C M\,dx + N\,dy = 0$。若在一點$P$其$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} > 0$，則由導數的連續性可得在某一包含$P$的區域$A$中，$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} > 0$。若$\Gamma$為此$A$的邊界，則

$$\oint_\Gamma M\,dx + N\,dy = \iint_A \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy > 0$$

此與線積分繞任一封閉曲線的值均爲零的假設矛盾。同理，若假設 $\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}<0$ 也會導致矛盾，因此在所有的點，$\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=0$。

注意條件 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ 與條件 $\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{0}$（$\mathbf{A}=M\mathbf{i}+N\mathbf{j}$）等價（見 5.10 題及 5.11 題）。此定理推廣至空間曲線的問題，請參閱 6.31 題。

6.13 令 $\mathbf{F}=\frac{-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}}{x^2+y^2}$ (a)計算 $\nabla\times\mathbf{F}$。(b)求 $\oint\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ 繞任一封閉路徑之值，並解釋其結果。

答 (a) 在任一不包含（0，0）的區域，$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0\end{vmatrix}=\mathbf{0}$

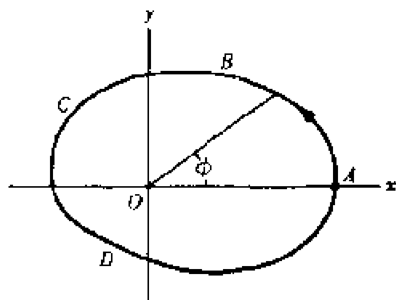
(b) $\oint\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\oint\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}$。令 $x=\rho\cos\phi$，$y=\rho\sin\phi$，其中（ρ，ϕ）爲極座標。則

$$dx=-\rho\sin\phi\,d\phi+d\rho\cos\phi,\qquad dy=\rho\cos\phi\,d\phi+d\rho\sin\phi$$

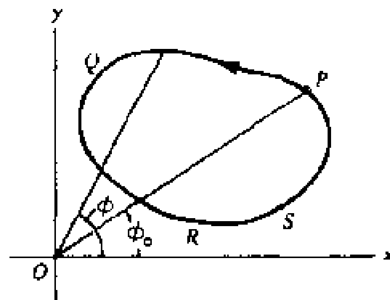
因而

$$\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}=d\phi=d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$$

對一個環繞原點的封閉曲線 $ABCDA$（見下面圖(a)），在 A 點 $\phi=0$，而在繞曲線一周再回到 A 點時 $\phi=2\pi$。此時線積分等於 $\int_0^{2\pi}d\phi=2\pi$。



圖(a)



圖(b)

對一個不繞原點的封閉曲線 $PQRSP$（見上面圖(b)），在 P 點 $\phi=\phi_0$，而在繞曲線一周回到 P 點時，$\phi=\phi_0$。此時線積分等於 $\int_{\phi_0}^{\phi_0}d\phi=0$。

由於$\mathbf{F}=M\mathbf{i}+N\mathbf{j}$，$\nabla\times\mathbf{F}=0$與$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$等價。此結果看起來似乎與6.12題矛盾。然而，因為$M=\frac{-y}{x^2+y^2}$，$N=\frac{x}{x^2+y^2}$在任一包含(0,0)的區域中沒有連續導數，這違反了6.12題的假設，所以並沒有矛盾存在。

散度定理

6.14 (a)用文字描述散度定理，(b)用直角座標寫出散度定理。

解 (a) 一向量$\mathbf{A}$在一封閉曲面上的法向分量的曲面積分等於$\mathbf{A}$的散度在由此曲面所包圍之體積上的積分。

(b) 令$\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$，則$\operatorname{div}\mathbf{A}=\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}$。

S上的單位法向量為$\mathbf{n}=n_1\mathbf{i}+n_2\mathbf{j}+n_3\mathbf{k}$，則$n_1=\mathbf{n}\cdot\mathbf{i}=\cos\alpha$，$n_2=\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}=\cos\beta$，$n_3=\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}=\cos\gamma$，其中$\alpha$，$\beta$，$\gamma$分別為$\mathbf{n}$與正$x$軸($\mathbf{i}$)，正$y$軸($\mathbf{j}$)，及正$z$軸($\mathbf{k}$)方向的夾角。$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\text{cor}\,\gamma$稱為$\mathbf{n}$的**方向餘弦**(direction cosine)，則

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} &= (A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})\cdot(\cos\alpha\,\mathbf{i}+\cos\beta\,\mathbf{j}+\cos\gamma\,\mathbf{k})\\ &= A_1\cos\alpha+A_2\cos\beta+A_3\cos\gamma\end{aligned}$$

因此散度定理可寫成

$$\iiint_V\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \iint_S(A_1\cos\alpha+A_2\cos\beta+A_3\cos\gamma)\,dS$$

6.15 用物理來證實散度定理。

解 令$\mathbf{A}$=在一流體中任一點的速度$\mathbf{v}$。由下圖(a)：

在Δt秒中通過dS的流體體積

=底為dS，斜高為$\mathbf{v}\Delta t$之柱體所含的體積

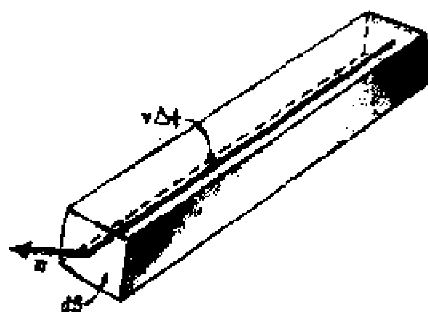
$$=(\mathbf{v}\Delta t)\cdot\mathbf{n}\,dS=\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS\,\Delta t$$

則每秒通過dS的體積$=\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS$。

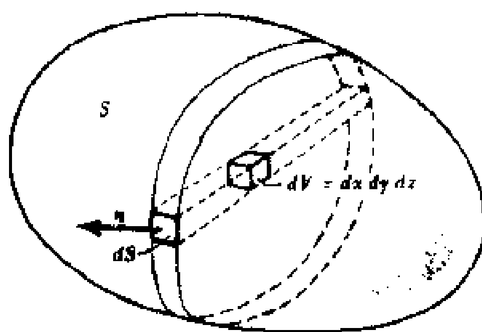
由圖(b)：

$$\text{每秒由封閉曲面}S\text{流出的總體積}=\iint_S\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

由4.21題，$\nabla\cdot\mathbf{v}\,dV$為每秒由一體積元$dV$流出的體積，則



圖(a)



圖(b)

$$\text{每秒由}S\text{中所有體積之流出的總體積} = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{v}\,dV$$

因此

$$\iint_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{v}\,dV$$

6.16　證明散度定理。

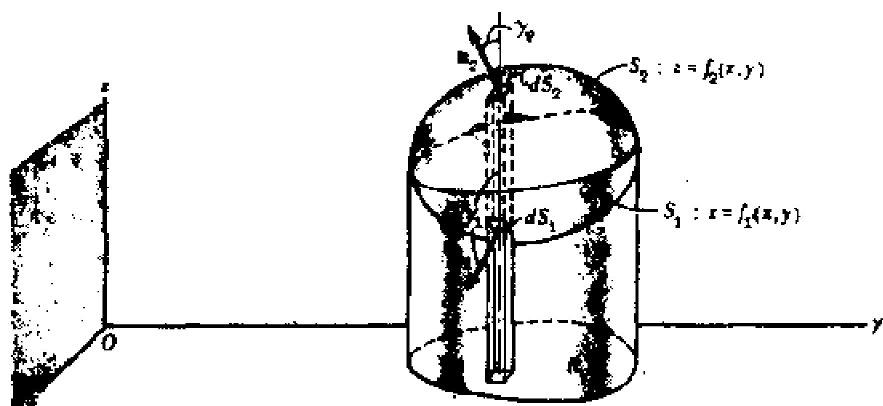


圖　令 S 爲一封閉曲面，且平行於座標軸的直線最多與 S 交於兩點。假設此曲面較低（S_1）與較高（S_2）部分的方程式分別爲 $z = f_1(x, y)$ 及 $z = f_2(x, y)$。並且令 R 爲此曲面在 xy 平面上的投影。考慮

$$\iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z}\,dV = \iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z}\,dz\,dy\,dx = \iint_R \left[\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial A_3}{\partial z}\,dz\right]dy\,dx$$

$$= \iint_R A_3(x,y,z)\Big|_{z=f_1}^{f_2}\,dy\,dx = \iint_R \left[A_3(x,y,f_2) - A_3(x,y,f_1)\right]dy\,dx$$

對較高的部分S_2，由於S_2上的法向量$\mathbf{n}_2$與$\mathbf{k}$形成一銳角γ_2，所以$dy\,dx=\cos\gamma_2\,dS_2=\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_2\,dS_2$。

對較低的部分S_1，由於S_1上的法向量$\mathbf{n}_1$與$\mathbf{k}$形成一鈍角γ_1，所以$dy\,dx=-\cos\gamma_1\,dS_1=-\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_1\,dS_1$。則

$$\iint_R A_3(x,y,f_2)\,dy\,dx = \iint_{S_2} A_3\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_2\,dS_2$$

$$\iint_R A_3(x,y,f_1)\,dy\,dx = -\iint_{S_1} A_3\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_1\,dS_1$$

且

$$\iint_R A_3(x,y,f_2)\,dy\,dx - \iint_R A_3(x,y,f_1)\,dy\,dx = \iint_{S_2} A_3\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_2\,dS_2 + \iint_{S_1} A_3\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_1\,dS_1$$

$$= \iint_S A_3\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

所以

$$(1)\qquad \iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z}\,dV = \iint_S A_3\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

同理，將S投影至其他座標平面，

$$(2)\qquad \iiint_V \frac{\partial A_1}{\partial x}\,dV = \iint_S A_1\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

$$(3)\qquad \iiint_V \frac{\partial A_2}{\partial y}\,dV = \iint_S A_2\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

將(1)，(2)，(3)相加得

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) dV = \iint_S (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}\,dS$$

或

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV = \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

此定理可以推廣至與平行座標之直線相交不只兩點的曲面。要建立此推廣，只要將曲面S所包圍的區域分割成數個子區域，而各子區域的外圍曲面滿足散度定理的條件。這個推廣的過程與平面中葛忍定理的推廣類似。

6.17 求 $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$，其中 $\mathbf{F}=4xz\,\mathbf{i}-y^2\,\mathbf{j}+yz\,\mathbf{k}$，且 S 為由 $x=0$，$x=1$，$y=0$，$y=1$，$z=0$，$z=1$ 所圍成之正立方體表面。

解 由散度定理，所要求的積分等於

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(4xz)+\frac{\partial}{\partial y}(-y^2)+\frac{\partial}{\partial z}(yz)\right]dV$$

$$= \iiint_V (4z-y)\,dV = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1}(4z-y)\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} 2z^2-yz\Big|_{z=0}^{1}\,dy\,dx = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}(2-y)\,dy\,dx = \frac{3}{2}$$

此曲面積分亦可像 5.23 題一樣直接求出。

6.18 若在由 $x^2+y^2=4$，$z=0$ 及 $z=3$ 所包圍的區域上取向量 $\mathbf{A}=4x\,\mathbf{i}-2y^2\,\mathbf{j}+z^2\,\mathbf{k}$，以此證實散度定理。

解

$$\text{體積積分} = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV = \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(4x)+\frac{\partial}{\partial y}(-2y^2)+\frac{\partial}{\partial z}(z^2)\right]dV$$

$$= \iiint_V (4-4y+2z)\,dV$$

$$= \int_{x=-2}^{2}\int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{z=0}^{3}(4-4y+2z)\,dz\,dy\,dx = 84\pi$$

此柱體的表面 S 包含了一個底部 S_1（$z=0$），頂部 S_2（$z=3$）及凸出的部分 S_3（$x^2+y^2=4$），則

$$\text{曲面積分} = \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS_1+\iint_{S_2}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS_2+\iint_{S_3}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS_3$$

在 S_1（$z=0$）上，$\mathbf{n}=-\mathbf{k}$，$\mathbf{A}=4x\,\mathbf{i}-2y^2\,\mathbf{j}$ 且 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}=0$，所以

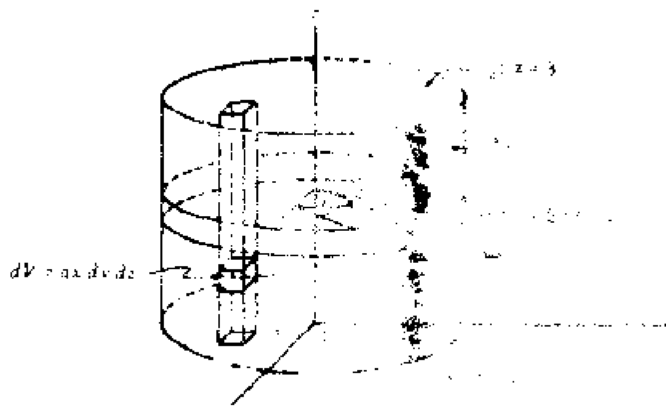
$$\iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS_1=0.$$

在 S_2（$z=3$）上，$\mathbf{n}=\mathbf{k}$，$\mathbf{A}=4x\,\mathbf{i}-2y^2\,\mathbf{j}+9\mathbf{k}$ 且 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}=9$，所以

$$\iint_{S_2} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS_2 = 9\iint_{S_2} dS_2 = 36\pi.$$ （因為S_2的面積 $=4\pi$）

在S_3（$x^2+y^2=4$）上，$\nabla(x^2+y^2)=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}$與$x^2+y^2=4$垂直，則一個單位法向量 $\mathbf{n}=\dfrac{2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}}{\sqrt{4x^2+4y^2}}=\dfrac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{2}$ （由於$x^2+y^2=4$）。

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = (4x\mathbf{i}-2y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k})\cdot\left(\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{2}\right) = 2x^2-y^3$$



由上圖可知，$x=2\cos\theta$ [illegible] $2\,d\theta\,dz$

$$\iint_{S_3} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS_3 = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{3}\left[2(2\cos\theta)^2-(2\sin\theta)^3\right]2\,dz\,d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}(48\cos^2\theta-48\sin^3\theta)\,d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi}48\cos^2\theta\,d\theta = 48\pi$$

則曲面積分 $=0+36\pi+48\pi=84\pi$，與前面的體積積分相同，故證實了散度定理。

注意在求S_3上的曲面積分時，我們也可以用S_3在xz或yz座標平面上的投影來做。

6.19 若div **A**代表一向量場**A**在P點的散度，證明

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\iint_{\Delta S}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS}{\Delta V}$$

其中ΔV為由曲面ΔS所包圍的體積，且極限是取將ΔV收縮至點P而得。

解 由散度定理，

$$\iiint_{\Delta V} \operatorname{div} \mathbf{A}\, dV = \iint_{\Delta S} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

再由積分的均值定理可知上式左邊可寫成

$$\overline{\operatorname{div} \mathbf{A}} \iiint_{\Delta V} dV = \overline{\operatorname{div} \mathbf{A}}\ \Delta V$$

其中$\overline{\operatorname{div} \mathbf{A}}$代表在整個$\Delta V$中，div **A**的最大值與最小值之間的某一中間值。則

$$\overline{\operatorname{div} \mathbf{A}} = \frac{\iint_{\Delta S} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS}{\Delta V}$$

取$\Delta V \to 0$時之極限，使得P一直在ΔV的內部，則$\overline{\operatorname{div} \mathbf{A}}$趨近於 div **A** 在$P$點的值；因此

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint_{\Delta S} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS}{\Delta V}$$

此結果可作爲對**A**的散度定義的起點，由此定義我們可以導出所有有關散度的性質，包括散度定理的證明。在第 7 章我們會利用此定義來將一向量之散度的觀念，由直角座標系推廣到非直角座標系。在物理上，

$$\frac{\iint_{\Delta S} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS}{\Delta V}$$

代表向量**A**由曲面ΔS每單位體積的通量或淨流出量。若在一點P的鄰域中div **A**爲正，表示由P所流出的量爲正，則我們稱P爲一源點（source）。同理，若在P的鄰域中div **A**爲負，則表示在P點的流出實際爲流入，我們稱此P點爲一匯點（sink）。如果在一區域中，既沒有源點也沒有匯點，則 div $\mathbf{A} = 0$，我們稱**A**爲一管狀向量場（solenoidal vector field）。

6.20 若S爲一封閉曲面，求 $\iint_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\, dS$。

解 由散度定理，

$$\iint_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{r}\, dV$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\, dV$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) dV = 3\iiint_V dV = 3V$$

其中V代表S所包圍的體積。

6.21 證明 $\iiint_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\, dV = \iint_S (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi)\cdot d\mathbf{S}$.

解 令散度定理中的$\mathbf{A} = \phi\nabla\psi$，則

$$\iiint_V \nabla\cdot(\phi\nabla\psi)\, dV = \iint_S (\phi\nabla\psi)\cdot\mathbf{n}\, dS = \iint_S (\phi\nabla\psi)\cdot d\mathbf{S}$$

但是

$$\nabla\cdot(\phi\nabla\psi) = \phi(\nabla\cdot\nabla\psi) + (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi) = \phi\nabla^2\psi + (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi)$$

因此

$$\iiint_V \nabla\cdot(\phi\nabla\psi)\, dV = \iiint_V [\phi\nabla^2\psi + (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi)]\, dV$$

或

$$(1) \quad \iiint_V [\phi\nabla^2\psi + (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi)]\, dV = \iint_S (\phi\nabla\psi)\cdot d\mathbf{S}$$

由此證明了**革忍第一恆等式**。將(1)中的ϕ與ψ互換得

$$(2) \quad \iiint_V [\psi\nabla^2\phi + (\nabla\psi)\cdot(\nabla\phi)]\, dV = \iint_S (\psi\nabla\phi)\cdot d\mathbf{S}$$

(1)減(2)得

$$(3) \quad \iiint_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\, dV = \iint_S (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi)\cdot d\mathbf{S}$$

此即爲**革忍第二恆等式**或**對稱定理**。在證明中我們假設ϕ及ψ均爲位置純量函數，且至少有二階連續導數。

6.22 證明 $\iiint_V \nabla\phi\, dV = \iint_S \phi\mathbf{n}\, dS$.

解 在散度定理中，令$\mathbf{A} = \phi\mathbf{C}$，且$\mathbf{C}$爲一常向量，則

$$\iiint_V \nabla\cdot(\phi\mathbf{C})\,dV = \iint_S \phi\mathbf{C}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

由於 $\nabla\cdot(\phi\mathbf{C})=(\nabla\phi)\cdot\mathbf{C}=\mathbf{C}\cdot\nabla\phi$ 且 $\phi\mathbf{C}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{C}\cdot(\phi\mathbf{n})$，所以

$$\iiint_V \mathbf{C}\cdot\nabla\phi\,dV = \iint_S \mathbf{C}\cdot(\phi\mathbf{n})\,dS$$

將C提出積分外得

$$\mathbf{C}\cdot\iiint_V \nabla\phi\,dV = \mathbf{C}\cdot\iint_S \phi\mathbf{n}\,dS$$

由於C可爲任一常向量，所以

$$\iiint_V \nabla\phi\,dV = \iint_S \phi\mathbf{n}\,dS$$

6.23 證明 $\iiint_V \nabla\times\mathbf{B}\,dV = \iint_S \mathbf{n}\times\mathbf{B}\,dS$.

解 在散度定理中，令 $\mathbf{A}=\mathbf{B}\times\mathbf{C}$，其中C爲一常向量，則

$$\iiint_V \nabla\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\,dV = \iint_S (\mathbf{B}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{n}\,dS$$

由於 $\nabla\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{C}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$ 且 $(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{n} = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{n}) = (\mathbf{C}\times\mathbf{n})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{B})$，所以

$$\iiint_V \mathbf{C}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})\,dV = \iint_S \mathbf{C}\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{B})\,dS$$

將C提出積分外得

$$\mathbf{C}\cdot\iiint_V \nabla\times\mathbf{B}\,dV = \mathbf{C}\cdot\iint_S \mathbf{n}\times\mathbf{B}\,dS$$

由於C可爲任一常向量，所以

$$\iiint_V \nabla\times\mathbf{B}\,dV = \iint_S \mathbf{n}\times\mathbf{B}\,dS$$

6.24 證明在任一點 P，

$$(a)\quad \nabla\phi = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\iint\limits_{\Delta S}\phi\mathbf{n}\,dS}{\Delta V} \quad 且 \quad (b)\quad \nabla\times\mathbf{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\iint\limits_{\Delta S}\mathbf{n}\times\mathbf{A}\,dS}{\Delta V}$$

其中 ΔV 爲曲面 ΔS 所包圍的體積，且極限是取將 ΔV 縮小至 P 的極限。

解 (a) 由 6.22 題，

$$\iiint\limits_{\Delta V}\nabla\phi\,dV = \iint\limits_{\Delta S}\phi\mathbf{n}\,dS.\quad 則\quad \iiint\limits_{\Delta V}\nabla\phi\cdot\mathbf{i}\,dV = \iint\limits_{\Delta S}\phi\mathbf{n}\cdot\mathbf{i}\,dS.$$

利用與 6.19 題同樣的原理，可得

$$\overline{\nabla\phi\cdot\mathbf{i}} = \frac{\iint\limits_{\Delta S}\phi\mathbf{n}\cdot\mathbf{i}\,dS}{\Delta V}$$

其中 $\overline{\nabla\phi\cdot\mathbf{i}}$ 爲在整個 ΔV 中，$\nabla\phi\cdot\mathbf{i}$ 之最大值與最小值之間的某一中間值。取 $\Delta V\to 0$ 之極限，使得 P 一直在 ΔV 的內部，$\nabla\phi\cdot\mathbf{i}$ 趨近於

$$(1)\qquad \nabla\phi\cdot\mathbf{i} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\iint\limits_{S}\phi\mathbf{n}\cdot\mathbf{i}\,dS}{\Delta V}$$

同理，我們可求得

$$(2)\qquad \nabla\phi\cdot\mathbf{j} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\iint\limits_{S}\phi\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}\,dS}{\Delta V}$$

$$(3)\qquad \nabla\phi\cdot\mathbf{k} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\iint\limits_{S}\phi\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\,dS}{\Delta V}$$

將(1)，(2)，(3)分別乘上 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$ 後再相加，利用

$$\nabla\phi = (\nabla\phi\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\nabla\phi\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\nabla\phi\cdot\mathbf{k})\mathbf{k},\qquad \mathbf{n} = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}$$

（見 2.20 題），則可證得所需之結果。

(b) 由 6.23 題，用 $\mathbf{A}$ 取代 $\mathbf{B}$ 可得

$$\iiint\limits_{\Delta V}\nabla\times\mathbf{A}\,dV = \iint\limits_{\Delta S}\mathbf{n}\times\mathbf{A}\,dS.$$

再利用(a)部分我們可證得

$$(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{i} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\iint\limits_{\Delta S}(\mathbf{n}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{i}\,dS}{\Delta V}$$

用 **j** 或 **k** 取代 **i** 亦可得類似的結果。將它們分別乘上 **i**，**j**，**k**，再相加即得證。

此結果可以當作梯度與旋度定義的起點。利用這些定理，可以將其推廣至非直角座標系。

6.25 建立下列等價運算：

$$\nabla\circ \equiv \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oiint\limits_{\Delta S} d\mathbf{S}\circ$$

其中“∘”代表點積、叉積或一般乘積。

解 要建立此二運算等價，也就是要使得此二運算在對向量場或純量場運算時會與已證明的結果一致。

如果∘代表點積，則對一向量 **A**，

$$\nabla\circ\mathbf{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iint\limits_{\Delta S} d\mathbf{S}\circ\mathbf{A}$$

或

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iint\limits_{\Delta S} d\mathbf{S}\cdot\mathbf{A}$$

$$= \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iint\limits_{\Delta S}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

這在 6.19 題已證明過。

同樣的，若∘代表叉積，

$$\operatorname{curl}\mathbf{A} = \nabla\times\mathbf{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iint\limits_{\Delta S} d\mathbf{S}\times\mathbf{A}$$

$$= \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iint\limits_{\Delta S}\mathbf{n}\times\mathbf{A}\,dS$$

這在 6.24(b)題已證過。

如果∘是一般乘積，則對一純量 ϕ，

$$\nabla\circ\phi = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iint_{\Delta S} d\mathbf{S}\circ\phi \quad 或 \quad \nabla\phi = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\iint_{\Delta S}\phi\, d\mathbf{S}$$

這在 6.24 (a)題證過。

6.26 令 S 為一封閉曲面，且令 $\mathbf{r}$ 代表由原點 O 至任一點 (x, y, z) 的位置向量。證明

$$\iint_S \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\, dS$$

等於(a) 0，若 O 在 S 外部；(b) 4π，若 O 在 S 內部。此結果稱為高斯定理（Gauss theorem）。

圖 (a) 由散度定理，

$$\iint_S \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\, dS = \iiint_V \nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}\, dV.$$

但是只要在 V 中 $r\neq 0$ 的點，$\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}=0$（4.19 題），即只要 O 在 V 的外部亦即在 S 的外部，則 $\iint_S \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\, dS = 0$。

(b) 若 O 在 S 的內部，則用一半徑 a 的小球 s 環繞 O。令 τ 代表介於 S 與 s 之間的區域，因為在 τ 中，r 均不等於 0，則由散度定理

$$\iint_{S+s} \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\, dS = \iint_S \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\, dS + \iint_s \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\, dS = \iint_\tau \nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}\, dV = 0$$

因此

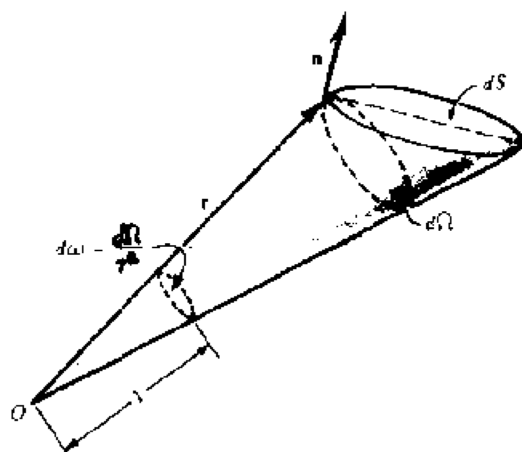
$$\iint_S \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\, dS = -\iint_s \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\, dS$$

而在 s 上，$r=a$，$\mathbf{n}=-\frac{\mathbf{r}}{a}$ 所以 $\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}=\frac{(-\mathbf{r}/a)\cdot\mathbf{r}}{a^3}=-\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}{a^4}=-\frac{a^2}{a^4}=-\frac{1}{a^2}$ 且

$$\iint_S \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\, dS = -\iint_s \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\, dS = \iint_s \frac{1}{a^2}\, dS = \frac{1}{a^2}\iint_s dS = \frac{4\pi a^2}{a^2} = 4\pi$$

6.27 用幾何方式解釋高斯定理（6.26 題）。

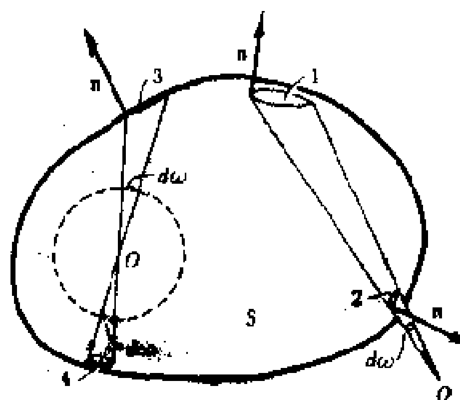
圖 令 dS 代表曲面上的一個面積元，並且將 dS 之邊界上的所有點與 O 相連（



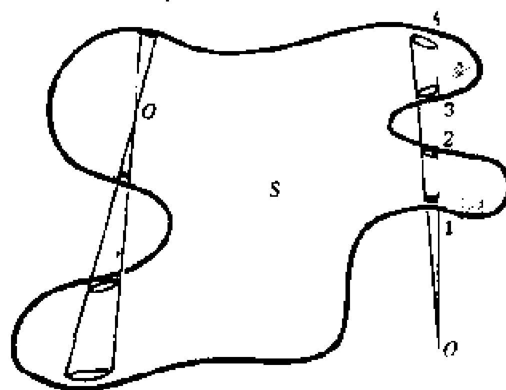
見附圖），形成一個錐體。令 $d\Omega$ 爲一以 O 爲球心，半徑爲 r 之球被此錐體所切割出的部分面積；則定義 dS 在 O 點所張的**立體角**（solid angle）爲 $d\omega=\frac{d\Omega}{r^2}$ ，且其値等於以 O 爲球心，單位半徑之球被此錐體所切出的面積。令 $\mathbf{n}$ 代表 dS 的正單位法向量，而 θ 爲 $\mathbf{n}$ 與 $\mathbf{r}$ 的夾角；則 $\cos\theta=\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r}$ ，同時 $d\Omega=\pm dS\cos\theta=\pm\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r}dS$ ，所以 $d\omega=\pm\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}dS$ ，式中正負號是由 $\mathbf{n}$ 與 $\mathbf{r}$ 之夾角 θ 是銳角還是鈍角而定。

令 S 爲一曲面，且任一直線與 S 最多交於兩點，如下面圖(a)所示。若 O 在 S 的外部，則在像圖中的 1 部分，$\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}dS=d\omega$ ；而在對應的 2 部分，$\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}dS=-d\omega$ 。在此二部分，由於立體角的兩個量互相抵消，所以積分等於 0 。當積分在整個 S 上作用時，每一個正的量就有一個負的量來跟它抵消，因此 $\iint_S\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}dS=0$ 。

如果 O 在 S 的內部，則有一個像 3 的區域，$\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}=d\omega$ ，而在 4 ，



圖(a)



圖(b)

$\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}dS = d\omega$ ，所以此二量是相加而不是互消，此時總立體角等於一個單位球的表面積 4π ，所以 $\iint_S \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}dS = 4\pi$。

對於那些直線可與其交於兩點以上的曲面 S ，參考圖(b)，上面的討論一樣可以成立。若 O 在 S 外部，則一個以 O 爲頂點的錐體與 S 交出偶數個區域，由於立體角成對互消，所以在整個曲面上積分等於 0 。若 O 在 S 內部，則以 O 爲頂點的錐體與 S 交出奇數塊區域，只有偶數塊區域會成對消去，所以對整個曲面 S ，恒有 4π 的量。

6.28 一流體之密度爲 $\rho(x,y,z,t)$ ，以速度 $\mathbf{v}(x,y,z,t)$ 移動。若沒有源點或匯點，證明

$$\nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \qquad \text{其中} \quad \mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$$

解 在此流體中，考慮任一包含體積 V 的曲面。在任一時間，在 V 中的流體質量爲

$$M = \iiint_V \rho\, dV$$

此質量對時間的增率爲

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\, dV = \iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV$$

每單位時間流出 V 的質量爲

$$\iint_S \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

（見 6.15 題），所以質量對時間的增率，由散度定理可知爲

$$-\iint_S \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS = -\iiint_V \nabla\cdot(\rho\mathbf{v})\, dV$$

則

$$\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV = -\iiint_V \nabla\cdot(\rho\mathbf{v})\, dV$$

或

$$\iiint_V \left(\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right) dV = 0$$

由於V爲任意，所以被積函數，假定其爲連續，必須恒等於零，其理由同6.12題。則

$$\nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \qquad \text{其中 } \mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$$

此方程式稱爲**連續性方程式**(continuity equation)。若ρ爲一常數，則此流體爲不可壓縮，且$\nabla\cdot\mathbf{v}=0$，即$\mathbf{v}$爲管狀向量。

連續性方程式也在電磁理論中出現，此時ρ爲**電荷密度**(charge density)，而$\mathbf{J}=\rho\mathbf{v}$爲**電流密度**(current density)。

6.29 若在時間t時，一固體中任一點(x,y,z)的溫度爲$U(x,y,z,t)$，且若κ，ρ及c分別爲此固體的熱傳導係數、密度及比熱，假設均爲常數。試證

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\nabla^2 U \qquad \text{其中 } k = \kappa/\rho c$$

解 令V爲此固體中的任一體積，S爲其表面。通過S的總熱流通量，或者說每單位時間離開S的熱量是

$$\iint_S (-\kappa\nabla U)\cdot\mathbf{n}\, dS$$

因此由散度定理可知每單位時間進入S的熱量爲

$$(1) \qquad \iint_S (\kappa\nabla U)\cdot\mathbf{n}\, dS = \iiint_V \nabla\cdot(\kappa\nabla U)\, dV$$

在體積V中所包含的體積爲

$$\iiint_V c\rho U\, dV$$

則熱對時間的增加率爲

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V c\rho U\, dV = \iiint_V c\rho\frac{\partial U}{\partial t}\, dV$$

將(1)式與(2)式的右邊相等，得

$$\iiint_V \left[c\rho \frac{\partial U}{\partial t} - \nabla\cdot(\kappa \nabla U)\right] dV = 0$$

由於V爲任意，所以被積函數（假設爲連續）必須恒等於 0，因此

$$c\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \nabla\cdot(\kappa \nabla U)$$

若κ，c，ρ 均爲常數，則

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\kappa}{c\rho}\nabla\cdot\nabla U = k\,\nabla^2 U$$

這個量k稱爲擴散性(diffusivity)。對穩態熱流（即$\partial U/\partial t = 0$，或$U$與時間無關）此方程式可導出拉卜拉士方程式$\nabla^2 U = 0$。

司托克士定理

6.30 (a)用文字敍述司托克士定理，(b)寫出其直角座標形式。

圖 (a) 向量**A**的切線分量繞一簡單封閉曲線的線積分等於**A**之旋度的法線分量在任一以C爲邊界之曲面上的曲面積分。

(b) 同 6.14(b)題，

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{n} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$$

則

$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\cos\gamma$$

$$\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\cdot(dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}) = A_1dx + A_2dy + A_3dz$$

且司托克士定理變成

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS$$

$$= \oint_C A_1dx + A_2dy + A_3dz$$

6.31 證明司托克士定理。

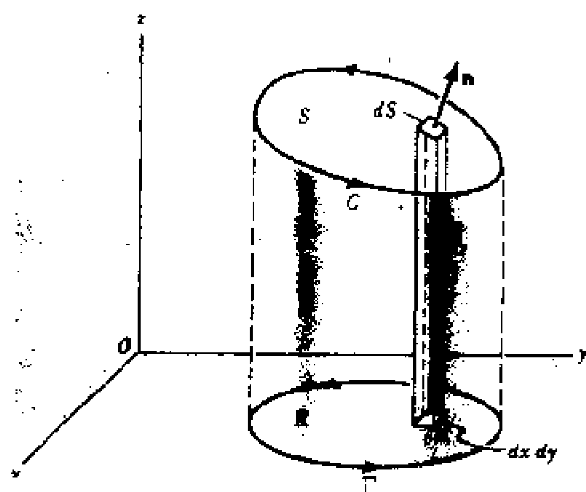


圖 令S為一曲面，其在 xy 平面，yz 平面及 xz 平面上的投影均為簡單封閉曲線所包圍的區域，如附圖所示。假設S可以用 $z=f(x,y)$ 或 $x=g(y,z)$ 或$y=h(x,z)$ 來表示，此處f，g，h均爲單値，連續且可微函數。我們必須證明

$$\iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_S [\nabla\times(A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})]\cdot\mathbf{n}\,dS$$

$$= \oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

式中C為S的邊界。

首先我們考慮

$$\iint_S [\nabla\times(A_1\mathbf{i})]\cdot\mathbf{n}\,dS.$$

由於

$$\nabla\times(A_1\mathbf{i}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial A_1}{\partial z}\mathbf{j} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\mathbf{k},$$

所以

$$(1) \qquad [\nabla\times(A_1\mathbf{i})]\cdot\mathbf{n}\,dS = \left(\frac{\partial A_1}{\partial z}\mathbf{n}\cdot\mathbf{j} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\right)dS$$

如果我們取$z=f(x,y)$為S的方程式，則在S上任一點的位置向量為 $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+f(x,y)\mathbf{k}$，所以 $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}=\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{k}=\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{k}$，但

是$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$是一個與$S$相切的向量（見3.25題），因此它與$\mathbf{n}$垂直，所以

$$\mathbf{n}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} = 0 \qquad \text{或} \qquad \mathbf{n}\cdot\mathbf{j} = -\frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}$$

代入(1)式可得

$$\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}\mathbf{n}\cdot\mathbf{j} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\right)dS = \left(-\frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\right)dS$$

或

$$(2) \qquad [\nabla\times(A_1\mathbf{i})]\cdot\mathbf{n}\,dS = -\left(\frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\,dS$$

而在S上，$A_1(x,y,z) = A_1(x,y,f(x,y)) = F(x,y)$，因此$\frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}$且(2)式變爲

$$[\nabla\times(A_1\mathbf{i})]\cdot\mathbf{n}\,dS = -\frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\,dS = -\frac{\partial F}{\partial y}\,dx\,dy$$

則

$$\iint_S [\nabla\times(A_1\mathbf{i})]\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_R -\frac{\partial F}{\partial y}\,dx\,dy$$

其中R是S在xy平面上的投影。由革忍定理知最後的積分等於$\oint_\Gamma F\,dx$，而Γ爲R的邊界。由於在Γ中每一點(x,y)上，F的値等於A_1在C上各點(x,y,z)的値，並且在兩個曲線上的dx相同，所以我們有

$$\oint_\Gamma F\,dx = \oint_C A_1\,dx$$

或

$$\iint_S [\nabla\times(A_1\mathbf{i})]\cdot\mathbf{n}\,dS = \oint_C A_1\,dx$$

同理，在對其它座標投影後可得

$$\iint_S [\nabla\times(A_2\mathbf{j})]\cdot\mathbf{n}\,dS = \oint_C A_2\,dy$$

$$\iint_S [\nabla\times(A_3\mathbf{k})]\cdot\mathbf{n}\,dS = \oint_C A_3\,dz$$

相加後得

$$\iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,dS = \oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

對不滿足上述限制條件的曲面 S，司托克士定理亦可能成立。因爲假設 S 可以分割成邊界分別爲 C_1，C_2，…，C_k 且滿足限制條件的曲面 S_1，S_2，…，S_k。將這些曲面積分加總，就可得到總曲面積分。將對應在 C_1，C_2，…，C_k 上的線積分加總，就可得到在 C 上的積分。

6.32 對 $\mathbf{A}=(2x-y)\mathbf{i}-yz^2\mathbf{j}-y^2z\mathbf{k}$，證明司托克士定理，其中 S 爲球 $x^2+y^2+z^2=1$ 的上半球面，而 C 爲此半球面邊界。

解 S 的邊界 C 爲在 xy 平面上，圓心在原點，半徑爲 1 之圓。令 $x=\cos t$，$y=\sin t$，$z=0$，$0\leq t<2\pi$ 爲 C 的參數方程式。則

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C (2x-y)\,dx - yz^2\,dy - y^2z\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\cos t - \sin t)(-\sin t)\,dt = \pi$$

同時，

$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x-y & -yz^2 & -y^2z \end{vmatrix} = \mathbf{k}$$

則

$$\iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_S \mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_R dx\,dy$$

由於 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\,dS=dx\,dy$，且 R 爲 S 在 xy 平面上的投影。所以最後的積分等於

$$\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx = 4\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi$$

由此證實了司托克士定理。

6.33 證明對任一封閉曲線 C 均有 $\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=0$ 的充要條件爲 $\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{0}$。

解 **充分性** 假設 $\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{0}$，則由司托克士定理

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,dS = 0$$

必要性　假設對任一封閉路徑 C，$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=0$，且假設在某一點 P，$\nabla\times\mathbf{A}\neq 0$。再假設 $\nabla\times\mathbf{A}$ 爲連續，則存在一個含 P 爲內點的區域，在此區域中 $\nabla\times\mathbf{A}\neq 0$。令 S 爲包含在此區域中的一個曲面，其在各點的法向量 $\mathbf{n}$ 與 $\nabla\times\mathbf{A}$ 方向相同，即 $\nabla\times\mathbf{A}=\alpha\mathbf{n}$，$\alpha$ 爲一正常數。令 C 爲 S 的邊界，則由司托克士定理，

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,dS = \alpha\iint_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}\,dS > 0$$

這與假設 $\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=0$ 矛盾，由此證得 $\nabla\times\mathbf{A}=0$。

$\nabla\times\mathbf{A}=0$ 同時也是線積分 $\int_{P_1}^{P_2}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ 與連接 P_1，P_2 之路徑無關的充要條件（見5.10題及5.11題）。

6.34　證明 $\oint d\mathbf{r}\times\mathbf{B} = \iint_S (\mathbf{n}\times\nabla)\times\mathbf{B}\,dS$.

解　在司托克士定理中，令 $\mathbf{A}=\mathbf{B}\times\mathbf{C}$，其中 $\mathbf{C}$ 爲一常向量，則

$$\oint d\mathbf{r}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \iint_S [\nabla\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]\cdot\mathbf{n}\,dS$$

$$\oint \mathbf{C}\cdot(d\mathbf{r}\times\mathbf{B}) = \iint_S [(\mathbf{C}\cdot\nabla)\mathbf{B} - \mathbf{C}(\nabla\cdot\mathbf{B})]\cdot\mathbf{n}\,dS$$

$$\begin{aligned}\mathbf{C}\cdot\oint d\mathbf{r}\times\mathbf{B} &= \iint_S [(\mathbf{C}\cdot\nabla)\mathbf{B}]\cdot\mathbf{n}\,dS - \iint_S [\mathbf{C}(\nabla\cdot\mathbf{B})]\cdot\mathbf{n}\,dS \\ &= \iint_S \mathbf{C}\cdot[\nabla(\mathbf{B}\cdot\mathbf{n})]\,dS - \iint_S \mathbf{C}\cdot[\mathbf{n}(\nabla\cdot\mathbf{B})]\,dS \\ &= \mathbf{C}\cdot\iint_S [\nabla(\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}) - \mathbf{n}(\nabla\cdot\mathbf{B})]\,dS = \mathbf{C}\cdot\iint_S (\mathbf{n}\times\nabla)\times\mathbf{B}\,dS\end{aligned}$$

由於 $\mathbf{C}$ 爲一任意常向量，所以

$$\oint d\mathbf{r}\times\mathbf{B} = \iint_S (\mathbf{n}\times\nabla)\times\mathbf{B}\,dS$$

6.35 若 ΔS 爲一被簡單封閉曲線 C 所包圍的曲面，P 爲 ΔS 上但不在 C 上的任一點，而 $\mathbf{n}$ 爲 ΔS 在 P 點的一個單位法向量，證明在 P 點，

$$(\text{curl}\,\mathbf{A})\cdot\mathbf{n} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}}{\Delta S}$$

其中極限是取當 ΔS 收縮至 P 點之時。

解 由司托克士定理，

$$\iint_{\Delta S}(\text{curl}\,\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,dS = \oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}.$$

同 6.19 題及 6.24 題一樣，利用均值定理可將上式改寫成

$$\overline{(\text{curl}\,\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}} = \frac{\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}}{\Delta S}$$

在取 $\Delta S\to 0$ 的極限時就可得到所需的結果。

此題可作爲 curl A 之定義（參考 6.36 題），在將 curl A 由直角座標系推廣到非直角座標系時非常有用。由於 $\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ 稱爲 A 對於 C 的循環，所以旋度的法線分量可以解釋爲每單位面積循環的極限。因此我們可以把 A 的旋轉（rot A）與 A 的旋度當作同義詞。

6.36 若 curl A 依據 6.35 題的定義，求 curl A 的 z 分量。

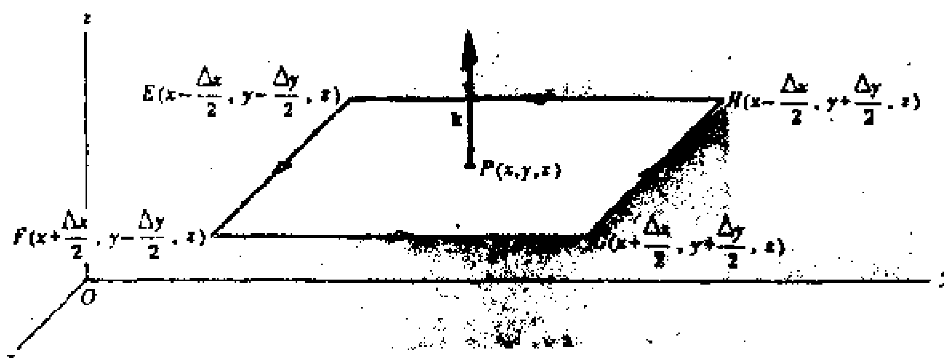


圖 令$EFGH$爲一中點在$P(x,y,z)$且與xy平面平行的矩形，如上圖所示。令A_1，A_2分別爲在P點$\mathbf{A}$對正x及正y方向的分量。

若C爲此矩形的邊界，則

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{EF}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} + \int_{FG}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} + \int_{GH}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} + \int_{HE}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

但是

$$\int_{EF}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = (A_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial A_1}{\partial y}\Delta y)\Delta x \qquad \int_{GH}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = -(A_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial A_1}{\partial y}\Delta y)\Delta x$$

$$\int_{FG}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = (A_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial A_2}{\partial x}\Delta x)\Delta y \qquad \int_{HE}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = -(A_2 - \frac{1}{2}\frac{\partial A_2}{\partial x}\Delta x)\Delta y$$

上列各式省略了較$\Delta x\,\Delta y$更高階的微小量。

相加後可得近似值

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = (\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y})\Delta x\,\Delta y.$$

則由於$\Delta S = \Delta x\,\Delta y$，所以

$$\text{curl } \mathbf{A}\text{的 } z \text{ 分量} = (\text{curl}\,\mathbf{A})\cdot\mathbf{k} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}}{\Delta S}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y})\Delta x\,\Delta y}{\Delta x\,\Delta y}$$

$$= \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}$$

補充題

6.37 用 $\oint_C (3x^2-8y^2)dx+(4y-6xy)dy$，$C$爲下列區域的邊界：(a) $y=\sqrt{x}$，$y=x^2$；(b) $x=0$，$y=0$，$x+y=1$，來證實平面中的革忍定理。

圖 (a) 共同值 $=2/3$　　(b) 共同值 $=5/3$

6.38 求 $\oint_C (3x+4y)dx+(2x-3y)dy$，其中$C$爲$xy$平面上，圓心在原點，半徑爲2之圓，以正向行進。

答 -8π

6.39 用線積分 $\oint_C (x^2+y^2)dx + 3xy^2\,dy$ 重作上題。

答 12π

6.40 求 $\oint (x^2-2xy)dx + (x^2y+3)dy$ 繞區域 $y^2=8x$，$x=2$ 之邊界之值。(a)直接計算；(b)用革忍定理來做。

答 $128/5$

6.41 求 $\int_{(0,0)}^{(\pi,2)} (6xy-y^2)dx + (3x^2-2xy)dy$ 沿擺線 $x=\theta-\sin\theta$，$y=1-\cos\theta$ 之值。

答 $6\pi^2-4\pi$

6.42 求 $\oint (3x^2+2y)dx - (x+3\cos y)dy$ 繞頂點爲 (0，0)，(2，0)，(3，1) 及 (1，1) 之平行四邊形之值。

答 -6

6.43 求由擺線 $x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$，$a>0$ 之一段與 x 軸所包圍之區域面積。

答 $3\pi a^2$

6.44 求內擺線 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$，$a>0$所包圍之面積。

提示：參數方程式爲 $x=a\cos^3\theta$，$y=a\sin^3\theta$。

答 $3\pi a^2/8$

6.45 證明用極座標 (ρ,ϕ)，可將 $x\,dy-y\,dx$ 表示成 $\rho^2\,d\phi$。解釋 $\frac{1}{2}\int x\,dy-y\,dx$。

6.46 求四瓣玫瑰線 $\rho=3\sin 2\phi$ 一瓣的面積。

答 $9\pi/8$

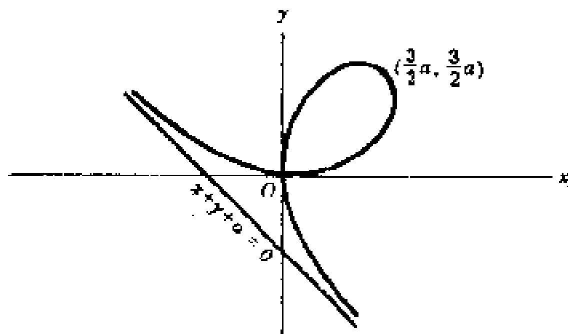
6.47 求雙紐線 $\rho^2=a^2\cos 2\phi$ 兩環所包圍的面積。

答 a^2

6.48 求笛卡爾葉形線 $x^3+y^3=3axy$，$a>0$（見附圖）之圈內面積。

提示：令 $y=tx$ 並得出此曲線的參數方程式，再利用

$$\text{面積} = \frac{1}{2}\oint x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\oint x^2\,d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}\oint x^2\,dt$$



答 $3a^2/2$

6.49 用 $\oint_C (2x-y^3)dx - xy\,dy$ 來證實平面中的革忍定理，其中 C 爲圓 $x^2+y^2=1$ 與 $x^2+y^2=9$ 之間區域的邊界。

答 共同值 $=60\pi$

6.50 求 $\int_{(1,0)}^{(-1,0)} \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}$ 沿下列路徑之值。

(a) 由 $(1,0)$ 至 $(1,1)$ 至 $(-1,1)$ 再至 $(-1,0)$ 的直線段。

(b) 由 $(1,0)$ 至 $(1,-1)$ 至 $(-1,-1)$ 再至 $(-1,0)$ 的直線段。

證明雖然 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$，此線積分之值仍然與連接 $(1,0)$ 至 $(-1,0)$ 的路徑有關，說明其理由。

答 (a) π (b) $-\pi$

6.51 利用轉換式 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$ 將變數由 (x,y) 變成 (u,v)，證明由一簡單封閉曲線所包圍之區域 R 的面積 A 爲

$$A=\iint_R \left| J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) \right| du\,dv \qquad \text{其中} \quad J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

是 x，y 對於 u，v 的亞可比（Jacobian）行列式。你必須作何限制？當 u，v 爲極座標時，其結果如何？

提示：利用 $A=\frac{1}{2}\int x\,dy-y\,dx$ 的結果，將其轉換成 u，v 座標，再利用革忍定理。

6.52 求 $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$，其中 $\mathbf{F}=2xy\mathbf{i}+yz^2\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$ 且 S 爲：

(a) 由 $x=0$，$y=0$，$z=0$，$x=2$，$y=1$ 及 $z=3$ 所包圍之平行六面體的表面。

(b) 由 $x=0$，$y=0$，$y=3$，$z=0$ 及 $x+2z=6$ 所包圍之區域的表面。

答 (a) 30 (b) 351/2

6.53 用 $\mathbf{A}=2x^2y\,\mathbf{i}-y^2\,\mathbf{j}+4xz^2\,\mathbf{k}$ 於 $y^2+z^2=9$ 及 $x=2$ 所包圍之區域在第一卦線部分證明散度定理。

答 180

6.54 求 $\iint_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,dS$，其中(a) S 為中心在 $(0,0,0)$，半徑為 2 之球面，(b) S 為由 $x=-1$，$y=-1$，$z=-1$，$x=1$，$y=1$，$z=1$ 所包圍之正立方體的表面，(c) S 為由拋物面 $z=4-(x^2+y^2)$ 及 xy 平面所包圍區域的表面。

答 (a) 32π (b) 24 (c) 24π

6.55 若 S 為任一包含體積 V 的封閉曲面，且 $\mathbf{A}=ax\,\mathbf{i}+by\,\mathbf{j}+cz\,\mathbf{k}$，證明 $\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS=(a+b+c)V$。

6.56 若 $\mathbf{H}=\text{curl }\mathbf{A}$，證明對任一封閉曲面 S，$\iint_S \mathbf{H}\cdot\mathbf{n}\,dS=0$。

6.57 若 $\mathbf{n}$ 為任一面積為 S 之封閉曲面的向外單位法向量，證明 $\iiint_V \text{div}\,\mathbf{n}\,dV=S$。

6.58 證明 $\iiint_V \dfrac{dV}{r^2}=\iint_S \dfrac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^2}\,dS$.

6.59 證明 $\iint_S r^5\,\mathbf{n}\,dS=\iiint_V 5r^3\,\mathbf{r}\,dV$.

6.60 證明對任意封閉曲面 S，$\iint_S \mathbf{n}\,dS=\mathbf{0}$。

6.61 證明葛忍第二恒等式可寫成 $\iiint_V(\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi)dV=\iint_S\left(\phi\dfrac{d\psi}{dn}-\psi\dfrac{d\phi}{dn}\right)dS$

6.62 證明對任一封閉曲面 S，$\iint_S \mathbf{r}\times d\mathbf{S}=\mathbf{0}$。

6.63 若 $\mathbf{A}=(y-z+2)\,\mathbf{i}+(yz+4)\,\mathbf{j}-xz\,\mathbf{k}$，$S$ 為在 xy 平面上方的正立方體 $x=0$，$y=0$，$z=0$，$x=2$，$y=2$，$z=2$，證實司托克士定理。

答 共同值 $=-4$

6.64 若 $\mathbf{F}=xz\,\mathbf{i}-y\,\mathbf{j}+x^2y\,\mathbf{k}$，$S$ 爲由 $x=0$，$y=0$，$z=0$，$2x+y+2z=8$ 所包圍區域的表面，但不包括在 xz 平面上的部分，證實司托克士定理。

6.65 計算 $\iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,dS$，其中 $\mathbf{A}=(x^2+y-4)\,\mathbf{i}+3xy\,\mathbf{j}+(2xz+z^2)\mathbf{k}$ 且 S 爲(a) $x^2+y^2+z^2=16$ 在 xy 平面上方的半球表面，(b)拋物面 $z=4-(x^2+y^2)$ 在 xy 平面上方的部分。

答 (a) -16π (b) -4π

6.66 若 $\mathbf{A}=2yz\,\mathbf{i}-(x+3y-2)\,\mathbf{j}+(x^2+z)\,\mathbf{k}$，求 $\iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,dS$，其中 S 爲圓柱 $x^2+y^2=a^2$ 與 $x^2+z^2=a^2$ 在第一卦限所相交的曲面。

答 $-\dfrac{a^2}{12}(3\pi+8a)$

6.67 若一向量 $\mathbf{B}$ 恒在一給定封閉曲面 S 的法線方向，證明 $\iiint_V \text{curl}\,\mathbf{B}\,dV=\mathbf{0}$，其中 V 爲 S 所包圍的區域。

6.68 若 $\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{H}\cdot d\mathbf{S}$，其中 S 爲任一以曲線 C 爲邊界的曲面，證明 $\nabla\times\mathbf{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$。

6.69 證明 $\oint_C \phi\,d\mathbf{r}=\iint_S d\mathbf{S}\times\nabla\phi$

6.70 利用 6.25 題的等價運算子，求直角座標的(a) $\nabla\phi$，(b) $\nabla\cdot\mathbf{A}$，(c) $\nabla\times\mathbf{A}$。

6.71 證明 $\iiint_V \nabla\phi\cdot\mathbf{A}\,dV=\iint_S \phi\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS-\iiint_V \phi\nabla\cdot\mathbf{A}\,dV$.

6.72 令 $\mathbf{r}$ 爲任一點相對於原點 O 的位置向量，假設 ϕ 至少有二階連續導數，且令 S 爲包圍一體積 V 的封閉曲面，用 ϕ_0 代表在 O 點的 ϕ，證明

$$\iint_S \left[\frac{1}{r}\nabla\phi-\phi\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right]\cdot d\mathbf{S}=\iiint_V \frac{\nabla^2\phi}{r}\,dV+\alpha$$

其中 $\alpha=0$ 或 $4\pi\phi_0$，依 O 在 S 的外部或內部而定。

6.73 由相對於點 P 之位置向量分別爲 $\mathbf{r}_1$，$\mathbf{r}_2$，⋯，$\mathbf{r}_n$ 的電荷（或質量）q_1，q_2，⋯

，q_n 之系統在點 $P(x,y,z)$ 所產生的電位 $\phi(P)$ 爲

$$\Phi = \sum_{n=1}^{n} \frac{q_n}{r_n}$$

證明高斯定律

$$\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi Q$$

其中 $\mathbf{E}=-\nabla\phi$ 爲電場強度，S 爲包圍所有電荷的曲面且 $Q=\sum_{n=1}^{n} q_n$ 爲在 S 中的總電荷。

6.74 若在一由曲面 S 所包圍的區域 V 中有一密度爲 ρ 的連續電荷（或質量）分佈，在點 P 的電位 $\phi(P)$ 定義爲 $\phi=\iiint_V \frac{\rho\, dV}{r}$，在適當的假設下導出下列各式：

(a) $\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi\iiint_V \rho\, dV$，其中 $\mathbf{E}=-\nabla\phi$。

(b) 在所有電荷存在的點 P 上，$\nabla^2\phi=-4\pi\rho$（帕松（Poisson）方程式），且在電荷不存在的點上，$\nabla^2\phi=0$（拉卜拉士方程式）。

第七章

曲線座標

7-1 座標變換

令任一點的直角座標 (x, y, z) 可用 (u_1, u_2, u_3) 的函數表示，即

$$(1) \qquad x = x(u_1, u_2, u_3), \quad y = y(u_1, u_2, u_3), \quad z = z(u_1, u_2, u_3)$$

假設由(1)式可將 u_1，u_2，u_3 解出，而用 x，y，z 表示。即

$$(2) \qquad u_1 = u_1(x, y, z), \quad u_2 = u_2(x, y, z), \quad u_3 = u_3(x, y, z)$$

假設在(1)，(2)中的函數均爲單值函數且有連續導數，所以 (x, y, z) 與 (u_1, u_2, u_3) 之間的對應爲唯一的。在實際上，此假設可能對某些特定點不成立，所以我們必須對這些點作特殊的考慮。

若給定一點 P，其直角座標爲 (x, y, z)，則我們可由(2)得到一組唯一的座標 (u_1, u_2, u_3)，稱爲 P 點的**曲線座標**（curvilinear coordinates）。方程組(1)或(2)定義了一個**座標變換**（transformation of coordinates）。

7-2 正交曲線座標

曲面 $u_1 = c_1$，$u_2 = c_2$，$u_3 = c_3$（c_1，c_2，c_3 均爲常數），稱爲**座標曲面**（coordinate surface），而這些曲面兩兩相交所得到的曲線稱爲**座標曲線**（coordinate

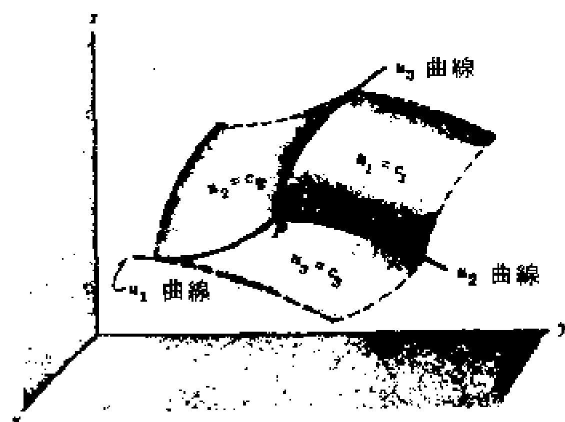


圖 1

curve)或座標線(coordinate line)，見圖1。若座標曲面以直角相交，則稱此曲線座標系爲正交(orthogonal)。曲線座標系中的座標曲線 u_1，u_2，u_3 與直角座標系中的 x，y，z 座標軸類似。

7-3 曲線座標系中的單位向量

令 $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 爲點 P 的位置向量，則(1)可寫成 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u_1,u_2,u_3)$。$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}$ 爲 u_1 曲線(u_2 及 u_3 爲常數)在 P 點的一個切向量。則在此方向的一個單位切向量爲 $\mathbf{e}_1=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}/\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}\right|$，所以 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}=h_1\mathbf{e}_1$，其中 $h_1=\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}\right|$。同理，若 $\mathbf{e}_2$ 和 $\mathbf{e}_3$ 分別爲 u_2 及 u_3 曲線在 P 點的切向量，則 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}=h_2\mathbf{e}_2$ 且 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}=h_3\mathbf{e}_3$，其中 $h_2=\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}\right|$，$h_3=\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}\right|$。此 h_1，h_2 及 h_3 三個量稱爲刻度因數(scale factor)，而單位向量 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$ 分別在 u_1，u_2，u_3 增加的方向。

由於 ∇u_1 爲一曲面 $u_1=c_1$ 在 P 點的一個法向量，所以在此方向的一個單位向量爲 $\mathbf{E}_1=\nabla u_1/|\nabla u_1|$。同理，$\mathbf{E}_2=\nabla u_2/|\nabla u_2|$ 及 $\mathbf{E}_3=\nabla u_3/|\nabla u_3|$ 分別爲曲面 $u_2=c_2$ 及 $u_3=c_3$ 在 P 點的單位法向量。

因此，在曲線座標系中的任一點 P，一般都存在兩組單位向量：$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$ 與座標曲線相切；$\mathbf{E}_1$，$\mathbf{E}_2$，$\mathbf{E}_3$ 位於座標曲面的法向(見圖2)。此二組向量相等的充要條件爲此曲線座標系爲正交(見7.19題)。此二組向量與直角座標系中的單位向量 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$ 十分類似，所不同的是它們在由一點至另一點時可能會改變方向。

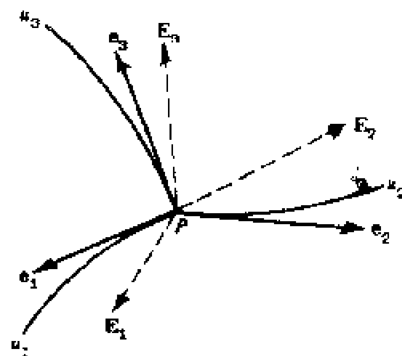


圖 2

我們可以證明(7.15題)，向量 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}$，$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}$，$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}$ 與 ∇u_1，∇u_2，∇u_3 互爲倒數向量系。

一個向量 $\mathbf{A}$ 可以用單位基底向量 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$ 或 $\mathbf{E}_1$，$\mathbf{E}_2$，$\mathbf{E}_3$ 表示成

$$\mathbf{A}=A_1\mathbf{e}_1+A_2\mathbf{e}_2+A_3\mathbf{e}_3=a_1\mathbf{E}_1+a_2\mathbf{E}_2+a_3\mathbf{E}_3$$

其中 A_1，A_2，A_3 及 a_1，a_2，a_3 分別爲 $\mathbf{A}$ 在各系統中的分量。

我們也可以用基底向量 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}$，$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}$，$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}$ 或 ∇u_1，∇u_2，∇u_3 來表示 $\mathbf{A}$，此種向

量我們稱爲單式基底向量(unitary base vector)而非一般的單位向量。此時,

$$\mathbf{A} = C_1\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} + C_2\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} + C_3\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} = C_1\boldsymbol{\alpha}_1 + C_2\boldsymbol{\alpha}_2 + C_3\boldsymbol{\alpha}_3$$

且

$$\mathbf{A} = c_1\nabla u_1 + c_2\nabla u_2 + c_3\nabla u_3 = c_1\boldsymbol{\beta}_1 + c_2\boldsymbol{\beta}_2 + c_3\boldsymbol{\beta}_3$$

其中C_1,C_2,C_3稱爲**A**的逆變分量(contravariant component),而c_1,c_2,c_3稱爲**A**的協變分量(covariant component)(見7.33題及7.34題)。注意

$\boldsymbol{\alpha}_p = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_p}$,$\boldsymbol{\beta}_p = \nabla u_p$,$p = 1,2,3$ 。

7-4 弧長及體積元

由$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$,可得

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}du_3 = h_1\,du_1\,\mathbf{e}_1 + h_2\,du_2\,\mathbf{e}_2 + h_3\,du_3\,\mathbf{e}_3$$

則弧長的微分ds可由$ds^2 = d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}$決定。對正交系而言,$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_1 = 0$,且

$$ds^2 = h_1^2\,du_1^2 + h_2^2\,du_2^2 + h_3^2\,du_3^2$$

至於非正交系或一般的曲線座標系,請參看7.17題。

沿著一u_1曲線,u_2及u_3爲常數,所以$d\mathbf{r} = h_1\,du_1\,\mathbf{e}_1$,則沿$u_1$在$P$點的弧長微分$ds_1$爲$h_1 du_1$,同理在$P$點沿$u_2$及$u_3$的弧長微分分別是$ds_2 = h_2 du_2$及$ds_3 = h_3 du_3$。

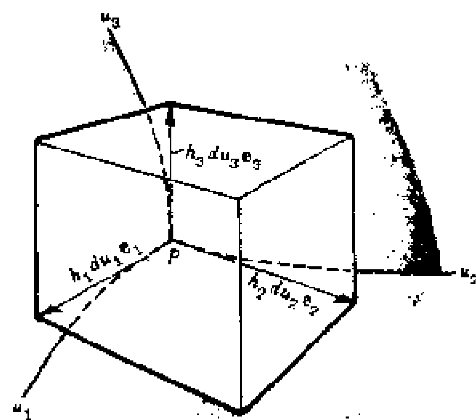


圖 3

參看圖3,對一正交曲線座標系,其體積元爲

$$dV = \left|(h_1 du_1\mathbf{e}_1)\cdot(h_2 du_2\mathbf{e}_2)\times(h_3 du_3\mathbf{e}_3)\right| = h_1 h_2 h_3\,du_1\,du_2\,du_3$$

因爲$|\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3| = 1$ 。

7-5 梯度、散度及旋度

梯度、散度及旋度也可以用曲線座標來表示。若Φ爲一純量函數,且$\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 +$

$A_2\mathbf{e}_2+A_3\mathbf{e}_3$ 爲正交曲線座標 u_1，u_2，u_3 的一個向量函數，則下列結果成立：

1. $\nabla\Phi = \text{grad } \Phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\mathbf{e}_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\mathbf{e}_2+\frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\mathbf{e}_3$

2. $\nabla\cdot\mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1)+\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1A_2)+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right]$

3. $\nabla\times\mathbf{A} = \text{curl } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix}$

4. $\nabla^2\Phi=\Phi$ 的拉卜拉士運算 $=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\right)\right]$

若 $h_1=h_2=h_3=1$，並用 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$ 取代上面的 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$，(x,y,z) 取代 (u_1,u_2,u_3)，則上面可化成直角座標系中的一般表示式。

上面這些結果的推廣，可藉曲線座標系中的一個更一般的定理來達成，它會用到張量分析(tensor analysis)的方法，我們將在第 8 章中討論。

7-6 特殊正交座標系

1. 柱面座標(cylindrical coordinate)(ρ,ϕ,z)。見圖 4，

$$x=\rho\cos\phi,\quad y=\rho\sin\phi,\quad z=z$$

其中

$$\rho\geqq 0,\quad 0\leqq\phi<2\pi,\quad -\infty<z<\infty$$
$$h_\rho=1,\quad h_\phi=\rho,\quad h_z=1$$

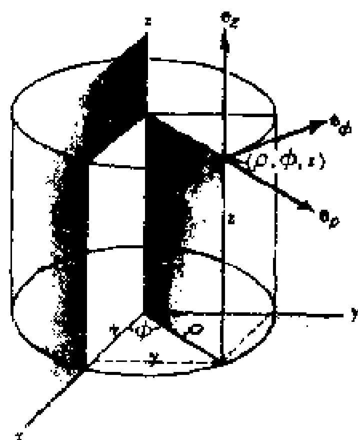


圖 4

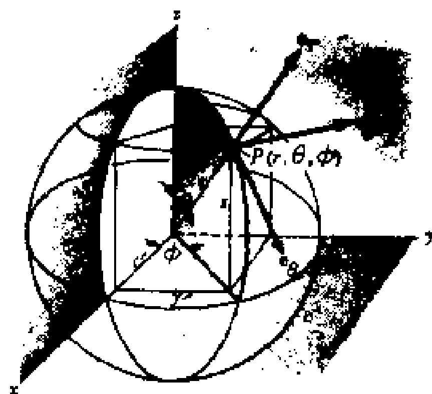


圖 5

2. 球面座標（spherical coordinate）(r, θ, ϕ)。見圖5，

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta$$

其中

$$r \geqq 0, \quad 0 \leqq \phi < 2\pi, \quad 0 \leqq \theta \leqq \pi$$
$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\phi = r\sin\theta$$

3. 拋物柱面座標（parabolic cylindrical coordinate）(u, v, z)，見圖6。

$$x = \tfrac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad y = uv, \quad z = z$$

其中

$$-\infty < u < \infty, \quad v \geqq 0, \quad -\infty < z < \infty$$
$$h_u = h_v = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_z = 1$$

在柱面座標中，

$$u = \sqrt{2\rho}\cos\frac{\phi}{2}, \quad v = \sqrt{2\rho}\sin\frac{\phi}{2}, \quad z = z$$

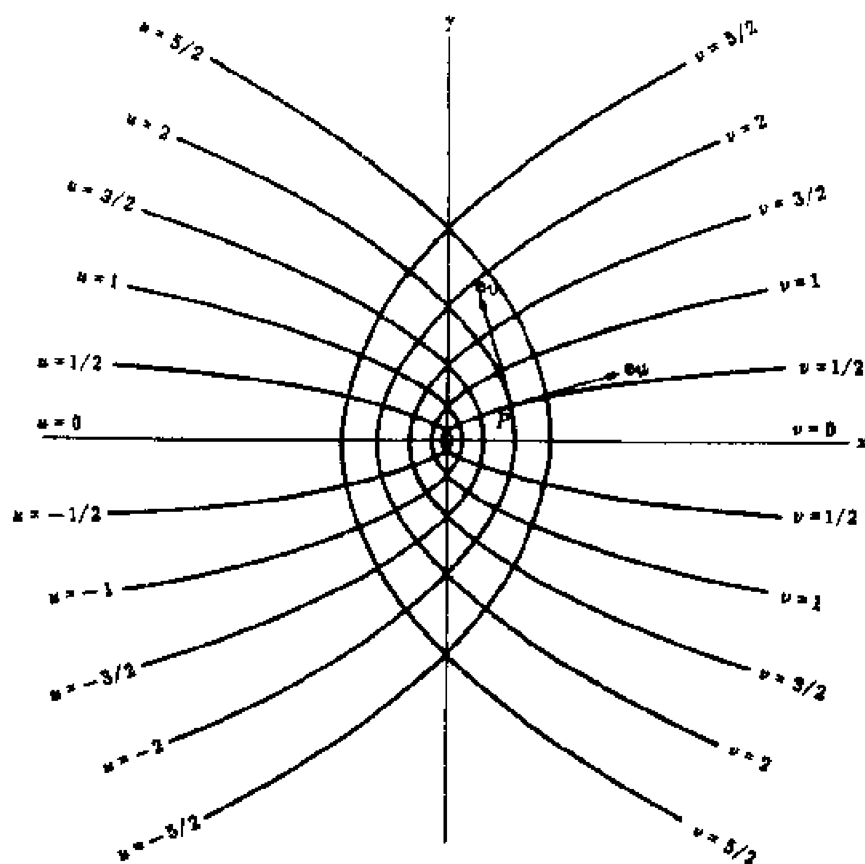


圖6

此座標曲面在 xy 平面上的軌跡如圖 6 所示。它們是有一共軸的共焦拋物線（confocal parabolas）。

4. 拋物面座標（paraboloidal coordinate）(u, v, ϕ)。

$$x = uv\cos\phi, \quad y = uv\sin\phi, \quad z = \tfrac{1}{2}(u^2 - v^2)$$

其中

$$u \geqq 0, \quad v \geqq 0, \quad 0 \leqq \phi < 2\pi$$
$$h_u = h_v = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_\phi = uv$$

二組座標曲面是由圖 6 中的拋物線繞 x 軸旋轉，再將 x 軸重標爲 z 軸而得。另一組座標曲面是通過此軸的平面。

5. 橢圓柱面座標（elliptic cylindrical coordinate）(u, v, z)，見圖 7。

$$x = a\cosh u\cos v, \quad y = a\sinh u\sin v, \quad z = z$$

其中

$$u \geqq 0, \quad 0 \leqq v < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$$
$$h_u = h_v = a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}, \quad h_z = 1$$

座標曲面在 xy 平面上的軌跡如圖 7 所示，爲共焦橢圓及雙曲線。

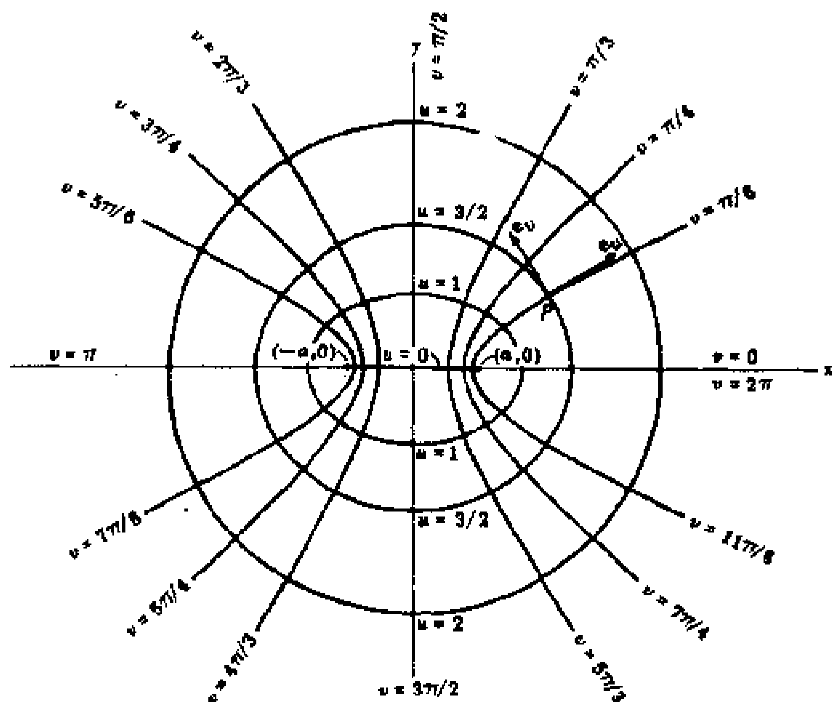


圖 7

6. **長球座標**(prolate spheroidal coordinate)(ξ,η,ϕ)。

$$x = a\sinh\xi\sin\eta\cos\phi,\quad y = a\sinh\xi\sin\eta\sin\phi,\quad z = a\cosh\xi\cos\eta$$

其中

$$\xi \geqq 0,\quad 0\leqq\eta\leqq\pi,\quad 0\leqq\phi<2\pi$$
$$h_\xi = h_\eta = a\sqrt{\sinh^2\xi+\sin^2\eta},\quad h_\phi = a\sinh\xi\sin\eta$$

兩組座標曲面是將圖 7 中的曲線繞 x 軸旋轉，再將 x 軸重新標記爲 z 軸而得，另一組座標曲面爲通過此軸的平面。

7. **扁球座標**(oblate spheroidal coordinate)(ξ,η,ϕ)。

$$x = a\cosh\xi\cos\eta\cos\phi,\quad y = a\cosh\xi\cos\eta\sin\phi,\quad z = a\sinh\xi\sin\eta$$

其中

$$\xi\geqq 0,\quad -\frac{\pi}{2}\leqq\eta\leqq\frac{\pi}{2},\quad 0\leqq\phi<2\pi$$
$$h_\xi = h_\eta = a\sqrt{\sinh^2\xi+\sin^2\eta},\quad h_\phi = a\cosh\xi\cos\eta$$

兩組座標曲面可由圖 7 之曲線繞 y 軸旋轉，再將 y 軸重新標記爲 z 軸而得，另一組座標曲面爲通過此軸的平面。

8. **橢面座標**(ellipsoidal coordinate)(λ,μ,ν)。

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda} = 1,\qquad \lambda<c^2<b^2<a^2$$
$$\frac{x^2}{a^2-\mu}+\frac{y^2}{b^2-\mu}+\frac{z^2}{c^2-\mu} = 1,\qquad c^2<\mu<b^2<a^2$$
$$\frac{x^2}{a^2-\nu}+\frac{y^2}{b^2-\nu}+\frac{z^2}{c^2-\nu} = 1,\qquad c^2<b^2<\nu<a^2$$

$$h_\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)}},\qquad h_\mu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)}}$$

$$h_\nu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{(a^2-\nu)(b^2-\nu)(c^2-\nu)}}$$

9. **雙極座標**(bipolar coordinate)(u,v,z)，見圖 8。

$$x^2+(y-a\cot u)^2 = a^2\csc^2 u,\quad (x-a\coth v)^2+y^2 = a^2\operatorname{csch}^2 v,\quad z = z$$

或

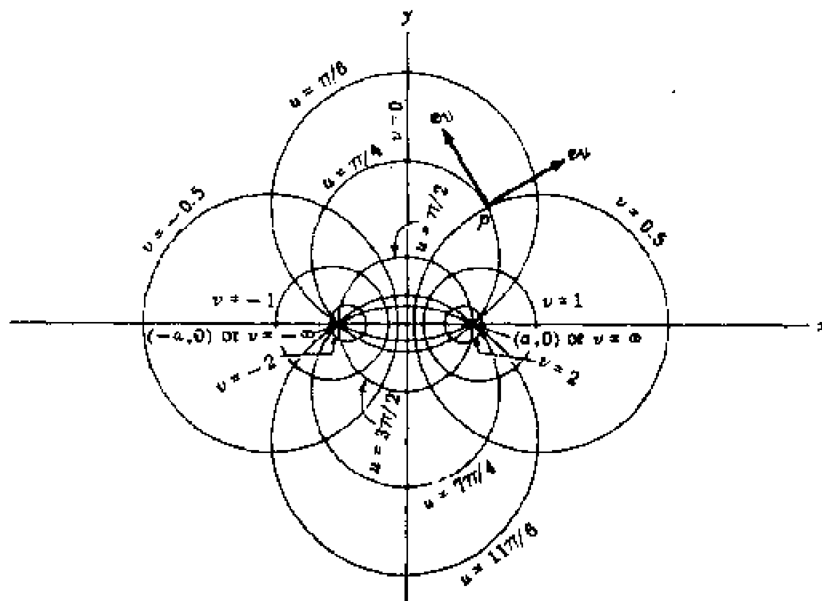


圖 8

$$x=\frac{a\sinh v}{\cosh v-\cos u},\quad y=\frac{a\sin u}{\cosh v-\cos u},\quad z=z$$

其中

$$0\leqq u<2\pi,\quad -\infty<v<\infty,\quad -\infty<z<\infty$$

$$h_u=h_v=\frac{a}{\cosh v-\cos u},\quad h_z=1$$

座標曲面在 xy 平面上的軌跡如圖 8 所示，將此圖中的曲線繞 y 軸旋轉，再將 y 軸重新標記爲 z 軸，就可得到圓環座標系 (toroidal coordinate system)。

習題與解答

7.1 對(a)柱面座標，(b)球面座標描述座標曲面及座標曲線。

答 (a) 座標曲面（或等值曲面）爲：

$\rho=c_1$ 以 z 軸爲中心軸的同軸圓柱（或若 $c_1=0$ 時爲 z 軸）

$\phi=c_2$ 通過 z 軸的平面

$z=c_3$ 與 z 軸垂直的平面

座標曲線爲：

$\rho=c_1$ 與 $\phi=c_2$ 的交集（z 曲線）爲一直線，

$\rho=c_1$ 與 $z=c_3$ 的交集（ϕ 曲線）爲一圓（或一點），

$\phi=c_2$ 與 $z=c_3$ 的交集（ρ 曲線）爲一直線。

(b) 座標曲面爲：

$r=c_1$ 以原點爲中心的球（或當 $c_1=0$ 時爲原點）

$\theta = c_2$　頂點在原點的錐面（若 $c_2 = 0$ 或 π 爲直線，若 $c_2 = \pi/2$ 爲 xy 平面）

$\phi = c_3$　通過 z 軸的平面

座標曲線爲：

$r = c_1$ 與 $\theta = c_2$ 的交集（ϕ 曲線）爲一圓（或一點）

$r = c_1$ 與 $\phi = c_3$ 的交集（θ 曲線）爲一半圓（$c_1 \neq 0$）

$\theta = c_2$ 與 $\phi = c_3$ 的交集（r 曲線）爲一直線。

7.2　試求由柱面座標轉換至直角座標的變換。

答　由直角座標轉換至柱面座標的定義方程式爲

$$(1)\ x = \rho\cos\phi, \quad (2)\ y = \rho\sin\phi, \quad (3)\ z = z$$

將(1)及(2)平方後相加可得，$\rho^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = x^2 + y^2$，或

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad （因爲 \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1，且 \rho 恒爲正）$$

將(2)式除以(1)式得，

$$\frac{y}{x} = \frac{\rho\sin\phi}{\rho\cos\phi} = \tan\phi \text{ 或 } \phi = \arctan\frac{y}{x}.$$

則所要求之變換式爲

$$(4)\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (5)\ \phi = \arctan\frac{y}{x}, \quad (6)\ z = z.$$

注意對在 z 軸上的點（$x = 0$，$y = 0$），ϕ 無法決定，這種點我們稱爲變換的奇點（singular point）。

7.3　證明柱面座標系爲正交座標系。

答　在柱面座標系中任一點的位置向量爲

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \rho\cos\phi\,\mathbf{i} + \rho\sin\phi\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

ρ 曲線、ϕ 曲線及 z 曲線的切向量分別爲 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}$，$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}$ 和 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}$，其中

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\,\mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\rho\sin\phi\,\mathbf{i} + \rho\cos\phi\,\mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}$$

在這些方向的單位向量爲

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_\rho = \frac{\partial\mathbf{r}/\partial\rho}{|\partial\mathbf{r}/\partial\rho|} = \frac{\cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\,\mathbf{j}}{\sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi}} = \cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\phi = \frac{\partial \mathbf{r}/\partial \phi}{|\partial \mathbf{r}/\partial \phi|} = \frac{-\rho \sin\phi\, \mathbf{i} + \rho\cos\phi\, \mathbf{j}}{\sqrt{\rho^2 \sin^2\phi + \rho^2\cos^2\phi}} = -\sin\phi\, \mathbf{i} + \cos\phi\, \mathbf{j}$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z = \frac{\partial \mathbf{r}/\partial z}{|\partial \mathbf{r}/\partial z|} = \mathbf{k}$$

則

$$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 = (\cos\phi\, \mathbf{i} + \sin\phi\, \mathbf{j})\cdot(-\sin\phi\, \mathbf{i} + \cos\phi\, \mathbf{j}) = 0$$

$$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_3 = (\cos\phi\, \mathbf{i} + \sin\phi\, \mathbf{j})\cdot(\mathbf{k}) = 0$$

$$\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3 = (-\sin\phi\, \mathbf{i} + \cos\phi\, \mathbf{j})\cdot(\mathbf{k}) = 0$$

所以 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$ 兩兩垂直，因此此座標系為正交座標系。

7.4 用柱面座標表示向量 $\mathbf{A} = z\,\mathbf{i} - 2x\,\mathbf{j} + y\mathbf{k}$，且由此決定 A_ρ，A_ϕ 及 A_z。

解 由7.3題，

$$(1)\ \mathbf{e}_\rho = \cos\phi\, \mathbf{i} + \sin\phi\, \mathbf{j} \qquad (2)\ \mathbf{e}_\phi = -\sin\phi\, \mathbf{i} + \cos\phi\, \mathbf{j} \qquad (3)\ \mathbf{e}_z = \mathbf{k}$$

聯立解(1)和(2)，

$$\mathbf{i} = \cos\phi\, \mathbf{e}_\rho - \sin\phi\, \mathbf{e}_\phi, \qquad \mathbf{j} = \sin\phi\, \mathbf{e}_\rho + \cos\phi\, \mathbf{e}_\phi$$

則

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= z\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + y\mathbf{k}\\ &= z(\cos\phi\, \mathbf{e}_\rho - \sin\phi\, \mathbf{e}_\phi) - 2\rho\cos\phi(\sin\phi\, \mathbf{e}_\rho + \cos\phi\, \mathbf{e}_\phi) + \rho\sin\phi\, \mathbf{e}_z\\ &= (z\cos\phi - 2\rho\cos\phi\sin\phi)\mathbf{e}_\rho - (z\sin\phi + 2\rho\cos^2\phi)\mathbf{e}_\phi + \rho\sin\phi\, \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

且

$$A_\rho = z\cos\phi - 2\rho\cos\phi\sin\phi, \quad A_\phi = -z\sin\phi - 2\rho\cos^2\phi, \quad A_z = \rho\sin\phi.$$

7.5 證明 $\frac{d}{dt}\mathbf{e}_\rho = \dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi$，$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_\phi = -\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\rho$，其中・代表對時間 t 的微分。

解 由7.3題，

$$\mathbf{e}_\rho = \cos\phi\, \mathbf{i} + \sin\phi\, \mathbf{j}, \qquad \mathbf{e}_\phi = -\sin\phi\, \mathbf{i} + \cos\phi\, \mathbf{j}$$

則

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_\rho = -(\sin\phi)\dot{\phi}\,\mathbf{i} + (\cos\phi)\dot{\phi}\,\mathbf{j} = (-\sin\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j})\dot{\phi} = \dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_\phi = -(\cos\phi)\dot{\phi}\,\mathbf{i} - (\sin\phi)\dot{\phi}\,\mathbf{j} = -(\cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\,\mathbf{j})\dot{\phi} = -\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\rho$$

7.6 在柱面座標中表示一質點的速度 $\mathbf{v}$ 及加速度 $\mathbf{a}$。

解 在直角座標中，位置向量為 $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$，且速度及加速度向量為

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \quad 及 \quad \mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}$$

在柱面座標中，利用 7.4 題，

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (\rho\cos\phi)(\cos\phi\,\mathbf{e}_\rho - \sin\phi\,\mathbf{e}_\phi) + (\rho\sin\phi)(\sin\phi\,\mathbf{e}_\rho + \cos\phi\,\mathbf{e}_\phi) + z\,\mathbf{e}_z$$
$$= \rho\,\mathbf{e}_\rho + z\,\mathbf{e}_z$$

則由 7.5 題

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\mathbf{e}_\rho + \rho\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z = \dot\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\dot\phi\,\mathbf{e}_\phi + \dot z\,\mathbf{e}_z$$

再微分一次，利用 7.5 題得

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\dot\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\dot\phi\,\mathbf{e}_\phi + \dot z\,\mathbf{e}_z)$$
$$= \dot\rho\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} + \ddot\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\dot\phi\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} + \rho\ddot\phi\,\mathbf{e}_\phi + \dot\rho\dot\phi\,\mathbf{e}_\phi + \ddot z\,\mathbf{e}_z$$
$$= \dot\rho\dot\phi\,\mathbf{e}_\phi + \ddot\rho\,\mathbf{e}_\rho - \rho\dot\phi(-\dot\phi\,\mathbf{e}_\rho) + \rho\ddot\phi\,\mathbf{e}_\phi + \dot\rho\dot\phi\,\mathbf{e}_\phi + \ddot z\,\mathbf{e}_z$$
$$= (\ddot\rho - \rho\dot\phi^2)\,\mathbf{e}_\rho + (\rho\ddot\phi + 2\dot\rho\dot\phi)\,\mathbf{e}_\phi + \ddot z\,\mathbf{e}_z$$

7.7 求柱面座標中弧長元的平方，並決定對應的刻度因數。

答 *方法 1*

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad z = z$$

$$dx = -\rho\sin\phi\,d\phi + \cos\phi\,d\rho, \quad dy = \rho\cos\phi\,d\phi + \sin\phi\,d\rho, \quad dz = dz$$

則

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (-\rho\sin\phi\,d\phi + \cos\phi\,d\rho)^2 + (\rho\cos\phi\,d\phi + \sin\phi\,d\rho)^2 + (dz)^2$$
$$= (d\rho)^2 + \rho^2(d\phi)^2 + (dz)^2 = h_1^2(d\rho)^2 + h_2^2(d\phi)^2 + h_3^2(dz)^2$$

且 $h_1 = h_\rho = 1$，$h_2 = h_\phi = \rho$，$h_3 = h_z = 1$ 為刻度因數。

另解 位置向量為 $\mathbf{r} = \rho\cos\phi\,\mathbf{i} + \rho\sin\phi\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$。則

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi}d\phi + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}dz$$
$$= (\cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\,\mathbf{j})\,d\rho + (-\rho\sin\phi\,\mathbf{i} + \rho\cos\phi\,\mathbf{j})\,d\phi + \mathbf{k}\,dz$$
$$= (\cos\phi\,d\rho - \rho\sin\phi\,d\phi)\,\mathbf{i} + (\sin\phi\,d\rho + \rho\cos\phi\,d\phi)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\,dz$$

因此

$$ds^2 = d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = (\cos\phi\,d\rho - \rho\sin\phi\,d\phi)^2 + (\sin\phi\,d\rho + \rho\cos\phi\,d\phi)^2 + (dz)^2$$
$$= (d\rho)^2 + \rho^2(d\phi)^2 + (dz)^2$$

7.8 對(a)球面座標及(b)拋物柱面座標，重做 7.7 題。

答 (a) $x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta$

則

$$dx = -r\sin\theta\sin\phi\, d\phi + r\cos\theta\cos\phi\, d\theta + \sin\theta\cos\phi\, dr$$

$$dy = r\sin\theta\cos\phi\, d\phi + r\cos\theta\sin\phi\, d\theta + \sin\theta\sin\phi\, dr$$

$$dz = -r\sin\theta\, d\theta + \cos\theta\, dr$$

且

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta\,(d\phi)^2$$

刻度因數爲

$$h_1 = h_r = 1, \quad h_2 = h_\theta = r, \quad h_3 = h_\phi = r\sin\theta.$$

(b) $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad y = uv, \quad z = z$

則

$$dx = u\,du - v\,dv, \quad dy = u\,dv + v\,du, \quad dz = dz$$

且

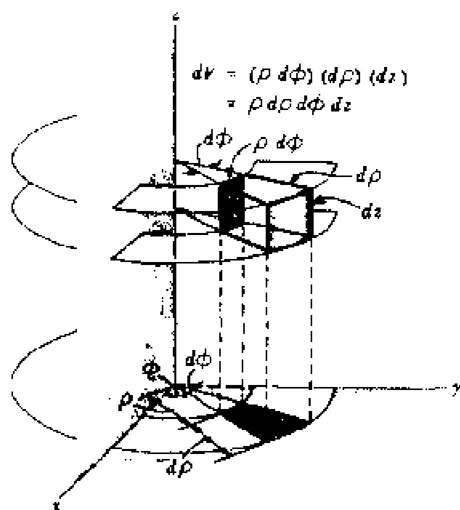
$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (u^2+v^2)(du)^2 + (u^2+v^2)(dv)^2 + (dz)^2$$

刻度因數爲

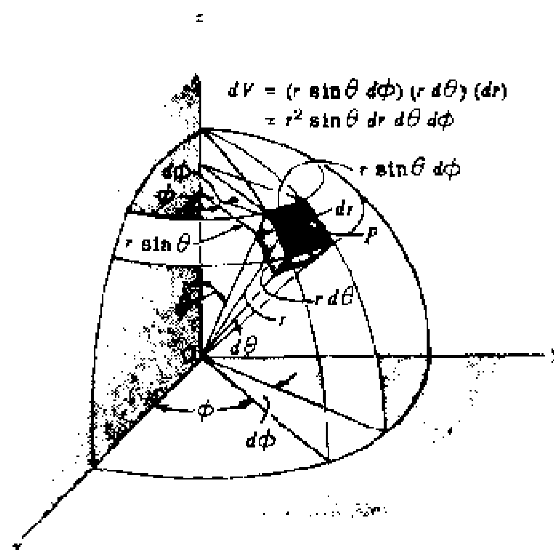
$$h_1 = h_u = \sqrt{u^2+v^2}, \quad h_2 = h_v = \sqrt{u^2+v^2}, \quad h_3 = h_z = 1.$$

7.9 在(a)柱面座標及(b)球面座標中繪出一體積元，並寫出其邊之大小。

答 (a) 在柱面座標中的體積元（圖(a)），其邊的大小爲 $\rho\, d\phi$，$d\rho$ 及 dz。這可由 7.7 題所得之刻度因數及下列事實得到：



圖(a) 柱面座標中的體積元



圖(b) 球面座標中的體積元

$$ds_1 = h_1 du_1 = (1)(d\rho) = d\rho, \quad ds_2 = h_2 du_2 = \rho\, d\phi, \quad ds_3 = (1)(dz) = dz$$

(b) 在球面座標中的體積元（圖(b)），其各邊的大小分別爲 dr，$r\,d\theta$，$r \sin\theta\, d\phi$，這可由 7.8 (a)題得到的刻度因數及下列事實得到：

$$ds_1 = h_1 du_1 = (1)(dr) = dr, \quad ds_2 = h_2 du_2 = r\, d\theta, \quad ds_3 = h_3 du_3 = r \sin\theta\, d\phi$$

7.10 求(a)柱面座標，(b)球面座標及(c)拋物柱面座標中的體積元 dV。

解 在正交座標系 u_1，u_2，u_3 中的體積元爲

$$dV = h_1 h_2 h_3\, du_1 du_2 du_3$$

(a) 在柱面座標中 $u_1 = \rho,\ u_2 = \phi,\ u_3 = z,\ h_1 = 1,\ h_2 = \rho,\ h_3 = 1$（見 7.7 題），則

$$dV = (1)(\rho)(1)\, d\rho\, d\phi\, dz = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$$

這也可由 7.9 題的圖(a)直接觀察得到。

(b) 在球面座標中，$u_1 = r,\ u_2 = \theta,\ u_3 = \phi,\ h_1 = 1,\ h_2 = r,\ h_3 = r\sin\theta$（見 7.8 (a)題），則

$$dV = (1)(r)(r\sin\theta)\, dr\, d\theta\, d\phi = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

這也可由 7.9 題的圖(b)直接觀察得到。

(c) 在拋物柱面座標中，$u_1 = u,\ u_2 = v,\ u_3 = z,\ h_1 = \sqrt{u^2+v^2},\ h_2 = \sqrt{u^2+v^2},\ h_3 = 1$（見 7.8 (b)題），則

$$dV = (\sqrt{u^2+v^2})(\sqrt{u^2+v^2})(1)\, du\, dv\, dz = (u^2+v^2)\, du\, dv\, dz$$

7.11 求在扁球座標中的(a)刻度因數及(b)體積元 dV。

解 (a) $x = a\cosh\xi\cos\eta\cos\phi, \quad y = a\cosh\xi\cos\eta\sin\phi, \quad z = a\sinh\xi\sin\eta$

$$dx = -a\cosh\xi\cos\eta\sin\phi\, d\phi - a\cosh\xi\sin\eta\cos\phi\, d\eta + a\sinh\xi\cos\eta\cos\phi\, d\xi$$

$$dy = a\cosh\xi\cos\eta\cos\phi\, d\phi - a\cosh\xi\sin\eta\sin\phi\, d\eta + a\sinh\xi\cos\eta\sin\phi\, d\xi$$

$$dz = a\sinh\xi\cos\eta\, d\eta + a\cosh\xi\sin\eta\, d\xi$$

則

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = a^2(\sinh^2\xi + \sin^2\eta)(d\xi)^2 + a^2(\sinh^2\xi + \sin^2\eta)(d\eta)^2 + a^2\cosh^2\xi\cos^2\eta\,(d\phi)^2$$

且

$$h_1 = h_\xi = a\sqrt{\sinh^2\xi + \sin^2\eta}, \quad h_2 = h_\eta = a\sqrt{\sinh^2\xi + \sin^2\eta}, \quad h_3 = h_\phi = a\cosh\xi\cos\eta.$$

(b) $$dV = (a\sqrt{\sinh^2\xi+\sin^2\eta})(a\sqrt{\sinh^2\xi+\sin^2\eta})(a\cosh\xi\cos\eta)\,d\xi\,d\eta\,d\phi$$
$$= a^3(\sinh^2\xi+\sin^2\eta)\cosh\xi\cos\eta\,d\xi\,d\eta\,d\phi$$

7.12 求在正交曲線座標中，面積元的表示式。

解 參考第179頁的圖3，面積元爲

$$dA_1 = |(h_2\,du_2\,\mathbf{e}_2)\times(h_3\,du_3\,\mathbf{e}_3)| = h_2h_3|\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3|\,du_2\,du_3 = h_2h_3\,du_2\,du_3$$

因爲 $|\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3|=|\mathbf{e}_1|=1$。同理

$$dA_2 = |(h_1\,du_1\,\mathbf{e}_1)\times(h_3\,du_3\,\mathbf{e}_3)| = h_1h_3\,du_1\,du_3$$

$$dA_3 = |(h_1\,du_1\,\mathbf{e}_1)\times(h_2\,du_2\,\mathbf{e}_2)| = h_1h_2\,du_1\,du_2$$

7.13 若 u_1，u_2，u_3 爲正交曲線座標，證明 x，y，z 相對於 u_1，u_2，u_3 的亞可比行列式爲

$$J\left(\frac{x,y,z}{u_1,u_2,u_3}\right) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix} = h_1h_2h_3$$

解 由2.38題可知，此行列式等於

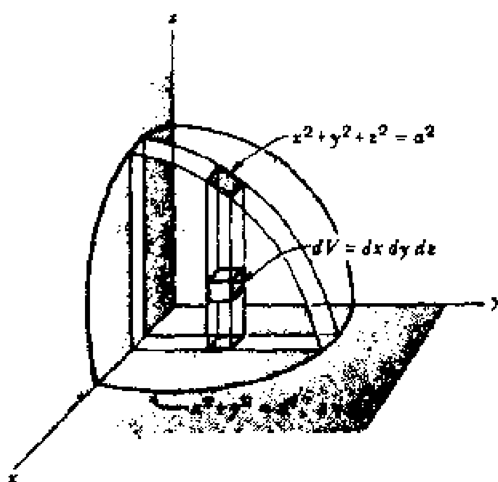
$$\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial u_1}\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial u_1}\mathbf{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial u_2}\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial u_2}\mathbf{k}\right)\times\left(\frac{\partial x}{\partial u_3}\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial u_3}\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial u_3}\mathbf{k}\right)$$
$$= \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3} = h_1\mathbf{e}_1\cdot h_2\mathbf{e}_2\times h_3\mathbf{e}_3$$
$$= h_1h_2h_3\,\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 = h_1h_2h_3$$

如果此亞可比行列式恒等於0，則 $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}$，$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}$，$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}$ 爲共面向量，則此曲線座標轉換式不成立，即 x，y，z 之間有一 $F(x,y,z)=0$ 形式的關係，所以我們必須要求此亞可比行列式不等於0。

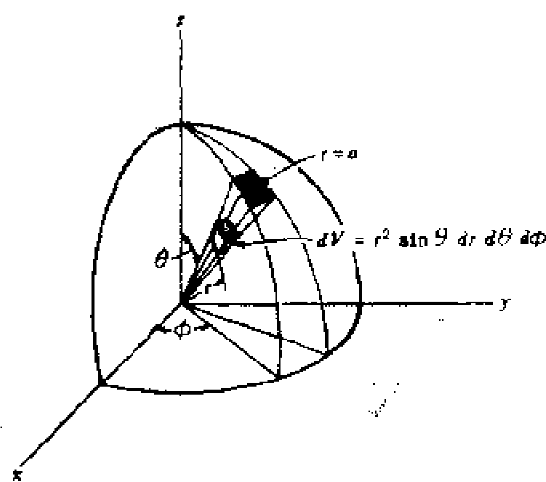
7.14 求 $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$，其中 V 爲中心在原點，半徑爲 a 之球。

解 所要求的積分等於在第一卦限部分之球（圖(a)）上積分的8倍。

則在直角座標系中，此積分等於



圖(a)



圖(b)

$$8\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)\,dz\,dy\,dx$$

這個積分雖然可以求，但是太煩了，如果我們用球面座標來做，會簡單得多。在轉換爲球面座標時，被積函數 $x^2+y^2+z^2$ 被 r^2 取代，而體積元 $dx\,dy\,dz$ 被體積元 $r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$ 取代（見7.10(b)題）。爲涵蓋第一卦限中所要求的區域，我們固定 θ 及 ϕ，由 $r=0$ 積分至 $r=a$；再固定 ϕ，由 $\theta=0$ 積分至 $\theta=\pi/2$；最後對 ϕ 由 $\phi=0$ 積分至 $\phi=\pi/2$。雖然各種順序都可以，此處我們採用 r，θ，ϕ 的順序來積分。其結果爲

$$8\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{a}(r^2)(r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi)=8\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{a}r^4\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$=8\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\frac{r^5}{5}\sin\theta\Big|_{r=0}^{a}d\theta\,d\phi=\frac{8a^5}{5}\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$=\frac{8a^5}{5}\int_{\phi=0}^{\pi/2}-\cos\theta\Big|_{\theta=0}^{\pi/2}d\phi=\frac{8a^5}{5}\int_{\phi=0}^{\pi/2}d\phi=\frac{4\pi a^5}{5}$$

在物理中，此積分代表此球對於原點的慣性矩，即若此球有單位密度，則此積分代表慣性極矩。

一般來說，當將一個重積分由直角座標轉換成正交曲線座標時，體積元 $dx\,dy\,dz$ 變成 $h_1h_2h_3\,du_1\,du_2\,du_3$ 或等價的 $J\left(\frac{x,y,z}{u_1,u_2,u_3}\right)du_1\,du_2\,du_3$，其中 J 爲由 x，y，z 轉成 u_1，u_2，u_3 的亞可比行列式（見7.13題）。

7.15 若 u_1，u_2，u_3 爲一般座標，證明 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}$ 與 ∇u_1，∇u_2，∇u_3 互爲倒數向量系。

圖 我們必須證明 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_p} \cdot \nabla u_q = \begin{cases} 1, 若\ p=q \\ 0, 若\ p \neq q \end{cases}$，其中 p，q 可爲 1，2，3 中任一數。我們已知

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3$$

兩邊同時乘上 $\nabla u_1 \cdot$，得

$$\nabla u_1 \cdot d\mathbf{r} = du_1 = (\nabla u_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}) du_1 + (\nabla u_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}) du_2 + (\nabla u_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}) du_3$$

或

$$\nabla u_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} = 1, \quad \nabla u_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} = 0, \quad \nabla u_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} = 0$$

同理，在兩邊乘上 $\nabla u_2 \cdot$ 及 $\nabla u_3 \cdot$ 就可證得其他的關係式。

7.16 證明 $\left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} \right\} \left\{ \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \times \nabla u_3 \right\} = 1.$

圖 由 7.15 題，$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}$，$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}$，$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}$ 與 ∇u_1，∇u_2，∇u_3 互爲倒數向量系，則由 2.53 (c)題可得所需之結果。

此結果與下面有關亞可比行列式之定理等價。

$$\nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \times \nabla u_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{vmatrix} = J\left(\frac{u_1, u_2, u_3}{x, y, z}\right)$$

且因此由 7.13 題可得 $J\left(\frac{x, y, z}{u_1, u_2, u_3}\right) J\left(\frac{u_1, u_2, u_3}{x, y, z}\right) = 1$

7.17 證明在一般曲線座標中，弧長元的平方可以表示成

$$ds^2 = \sum_{p=1}^{3} \sum_{q=1}^{3} g_{pq}\, du_p\, du_q$$

解 我們有

$$dr = \frac{\partial r}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial r}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial r}{\partial u_3}du_3 = \mathbf{a}_1 du_1 + \mathbf{a}_2 du_2 + \mathbf{a}_3 du_3$$

則

$$\begin{aligned} ds^2 = dr \cdot dr &= \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_1\, du_1^2 + \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2\, du_1 du_2 + \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_3\, du_1 du_3 \\ &\quad + \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_1\, du_2 du_1 + \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_2\, du_2^2 + \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_3\, du_2 du_3 \\ &\quad + \mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_1\, du_3 du_1 + \mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_2\, du_3 du_2 + \mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_3\, du_3^2 \\ &= \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g_{pq}\, du_p du_q \quad \text{其中} \quad g_{pq} = \mathbf{a}_p\cdot\mathbf{a}_q \end{aligned}$$

此式稱爲**基本二次式**(fundamental quadratic form)或**度量式**(metric form)。g_{pq} 稱爲**度量係數**(metric coefficient)，且其具有對稱性，即 $g_{pq}=g_{qp}$。若 $g_{pq}=0$，$p\neq q$，則座標系爲正交。此時 $g_{11}=h_1^2$，$g_{22}=h_2^2$，$g_{33}=h_3^2$。更高維的度量式在討論相對性定理時非常重要（見第 8 章）。

在正交座標系中的梯度、散度及旋度

7.18 在正交曲線座標中導出∇Φ的表示式。

解 令 $\nabla\Phi = f_1\mathbf{e}_1 + f_2\mathbf{e}_2 + f_3\mathbf{e}_3$ 其中 f_1，f_2，f_3 未定，由於

$$\begin{aligned} dr &= \frac{\partial r}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial r}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial r}{\partial u_3}du_3 \\ &= h_1\mathbf{e}_1 du_1 + h_2\mathbf{e}_2 du_2 + h_3\mathbf{e}_3 du_3 \end{aligned}$$

所以

$$(1) \quad d\Phi = \nabla\Phi\cdot dr = h_1 f_1 du_1 + h_2 f_2 du_2 + h_3 f_3 du_3$$

但是

$$(2) \quad d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial u_3}du_3$$

(1)與(2)相等，

$$f_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}, \quad f_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}, \quad f_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}.$$

則

$$\nabla\Phi = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}$$

由此可知

$$\nabla = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}$$

此式可化簡得到在直角座標系中∇的一般表示式。

7.19 令u_1，u_2，u_3爲正交座標，(a)證明 $|\nabla u_p| = h_p^{-1}$, $p = 1,2,3$.

(b)證明 $\mathbf{e}_p = \mathbf{E}_p$。

解 (a) 令7.18題中的$\Phi = u_1$，則$\nabla u_1 = \dfrac{\mathbf{e}_1}{h_1}$，所以$|\nabla u_1| = \dfrac{|\mathbf{e}_1|}{h_1} = h_1^{-1}$。

同理，再令$\Phi = u_2$及u_3可得$|\nabla u_2| = h_2^{-1}$，$|\nabla u_3| = h_3^{-1}$。

(b) 由定義 $\mathbf{E}_p = \dfrac{\nabla u_p}{|\nabla u_p|}$，再由(a)，此式可寫成 $\mathbf{E}_p = h_p \nabla u_p = \mathbf{e}_p$，得證。

7.20 證明 $\mathbf{e}_1 = h_2 h_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3$及對應於$\mathbf{e}_2$及$\mathbf{e}_3$的相似方程式，其中$u_1$，$u_2$，$u_3$爲正交座標。

解 由7.19題，

$$\nabla u_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1},\ \nabla u_2 = \frac{\mathbf{e}_2}{h_2},\ \nabla u_3 = \frac{\mathbf{e}_3}{h_3}.$$

則

$$\nabla u_2 \times \nabla u_3 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{h_2 h_3} = \frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3} \quad 且 \quad \mathbf{e}_1 = h_2 h_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3.$$

同理

$$\mathbf{e}_2 = h_3 h_1 \nabla u_3 \times \nabla u_1 \quad , \quad \mathbf{e}_3 = h_1 h_2 \nabla u_1 \times \nabla u_2.$$

7.21 證明在正交座標系中

(a) $\nabla \cdot (A_1 \mathbf{e}_1) = \dfrac{1}{h_1 h_2 h_3} \dfrac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_2 h_3)$

(b) $\nabla \times (A_1 \mathbf{e}_1) = \dfrac{\mathbf{e}_2}{h_3 h_1} \dfrac{\partial}{\partial u_3}(A_1 h_1) - \dfrac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2} \dfrac{\partial}{\partial u_2}(A_1 h_1)$

及對應於$A_2 \mathbf{e}_2$，$A_3 \mathbf{e}_3$的類似結果。

解 (a) 由7.20題，

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (A_1 \mathbf{e}_1) &= \nabla \cdot (A_1 h_2 h_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3) \\
&= \nabla(A_1 h_2 h_3) \cdot \nabla u_2 \times \nabla u_3 + A_1 h_2 h_3 \nabla \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3) \\
&= \nabla(A_1 h_2 h_3) \cdot \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \times \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} + 0 = \nabla(A_1 h_2 h_3) \cdot \frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3} \\
&= \left[\frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_2 h_3) + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2}(A_1 h_2 h_3) + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3}(A_1 h_2 h_3) \right] \cdot \frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3} \\
&= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_2 h_3)
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
\nabla \times (A_1 \mathbf{e}_1) &= \nabla \times (A_1 h_1 \nabla u_1) \\
&= \nabla(A_1 h_1) \times \nabla u_1 + A_1 h_1 \nabla \times \nabla u_1
\end{aligned}$$

$$= \nabla(A_1h_1)\times\frac{\mathbf{e}_1}{h_1} + \mathbf{0}$$

$$= \left[\frac{\mathbf{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_1) + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(A_1h_1) + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1h_1)\right]\times\frac{\mathbf{e}_1}{h_1}$$

$$= \frac{\mathbf{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1h_1) - \frac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(A_1h_1)$$

7.22 在正交座標系中表示 $\operatorname{div}\mathbf{A}=\nabla\cdot\mathbf{A}$。

答 利用7.21(a)題，

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \nabla\cdot(A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3) = \nabla\cdot(A_1\mathbf{e}_1) + \nabla\cdot(A_2\mathbf{e}_2) + \nabla\cdot(A_3\mathbf{e}_3)$$

$$= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(A_2h_3h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3}(A_3h_1h_2)\right]$$

7.23 在正交座標系中表示 $\operatorname{curl}\mathbf{A}=\nabla\times\mathbf{A}$。

答 由7.21(b)題，

$$\nabla\times\mathbf{A} = \nabla\times(A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3) = \nabla\times(A_1\mathbf{e}_1) + \nabla\times(A_2\mathbf{e}_2) + \nabla\times(A_3\mathbf{e}_3)$$

$$= \frac{\mathbf{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1h_1) - \frac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(A_1h_1)$$
$$+ \frac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_1}(A_2h_2) - \frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(A_2h_2)$$
$$+ \frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3h_3) - \frac{\mathbf{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}(A_3h_3)$$

$$= \frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2h_2)\right] + \frac{\mathbf{e}_2}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(A_3h_3)\right]$$
$$+ \frac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_2h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(A_1h_1)\right]$$

此式可寫成

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ A_1h_1 & A_2h_2 & A_3h_3 \end{vmatrix}$$

7.24 在正交曲線座標中表示 $\nabla^2\psi$。

答 由7.18題，

$$\nabla\psi = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_3}.$$

若 $\mathbf{A}=\nabla\psi$，則 $A_1=\dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial\psi}{\partial u_1}$，$A_2=\dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial\psi}{\partial u_2}$，$A_3=\dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial\psi}{\partial u_3}$ 再利用7.22題可得

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \nabla\psi = \nabla^2\psi$$
$$= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_3}\right)\right]$$

7.25 利用散度的積分定義

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\displaystyle\iint_{\Delta S}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS}{\Delta V}$$

（見6.19題）來表示正交曲線座標中的$\nabla\cdot\mathbf{A}$。

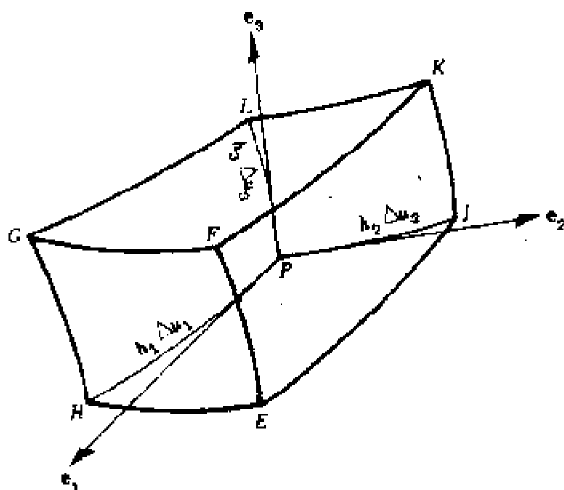


圖 考慮各邊爲$h_1\Delta u_1$，$h_2\Delta u_2$，$h_3\Delta u_3$的體積元ΔV（參閱附圖）。

令$\mathbf{A}=A_1\mathbf{e}_1+A_2\mathbf{e}_2+A_3\mathbf{e}_3$且令$\mathbf{n}$爲$\Delta V$表面$\Delta S$上的向外單位法向量，在曲面$JKLP$上，$\mathbf{n}=-\mathbf{e}_1$。則我們可得近似值，

$$\iint_{JKLP}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS = (\text{在點}P\text{的}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})(JKLP\text{的面積})$$
$$= [(A_1\mathbf{e}_1+A_2\mathbf{e}_2+A_3\mathbf{e}_3)\cdot(-\mathbf{e}_1)](h_2h_3\Delta u_2\Delta u_3)$$
$$= -A_1h_2h_3\Delta u_2\Delta u_3$$

在曲面$EFGH$上，面積分爲（比$\Delta u_1\Delta u_2\Delta u_3$高階的微小量略去不計）

$$A_1h_2h_3\Delta u_2\Delta u_3 + \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3\Delta u_2\Delta u_3)\Delta u_1$$

則在此二面上的面積分的淨增量爲

$$\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3\Delta u_2\Delta u_3)\Delta u_1 = \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3)\Delta u_1\Delta u_2\Delta u_3$$

ΔV 六個面的總增量爲

$$\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(A_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3}(A_3 h_1 h_2)\right] \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$$

將此量除以體積 $h_1 h_2 h_3 \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$ 再取 Δu_1，Δu_2，Δu_3 趨近於 0 之極限，我們可發現

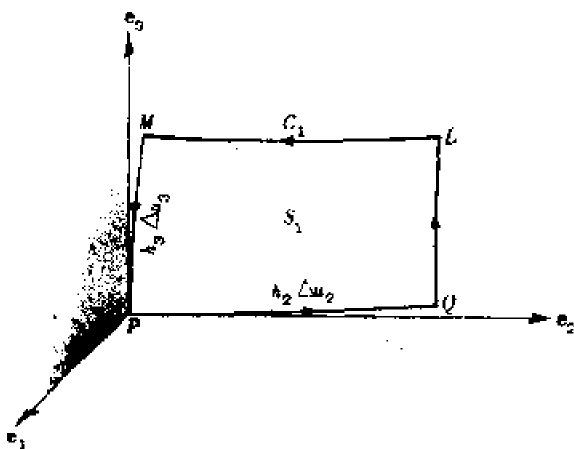
$$\text{div}\,\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(A_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3}(A_3 h_1 h_2)\right]$$

注意，若我們取一體積元 ΔV，其以 P 爲內點時亦可得到同樣的結果。此時，我們計算的方法與 4.21 題類似。

7.26 利用積分定義

$$(\text{curl}\,\mathbf{A})\cdot\mathbf{n} = (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}}{\Delta S}$$

（見 6.35 題）來表示正交曲線座標中的 $\nabla\times\mathbf{A}$。



解　我們首先計算 $(\text{curl}\,\mathbf{A})\cdot\mathbf{e}_1$。要求此值，我們考慮在 P 點以 $\mathbf{e}_1$ 爲法向的曲面 S_1，如附圖所示。S_1 的邊界用 C_1 表示，令 $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$，我們有

$$\oint_{C_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{PQ}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} + \int_{QL}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} + \int_{LM}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} + \int_{MP}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

下列近似式成立

(1) $$\int_{PQ} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = (\text{在}P\text{點的}\mathbf{A})\cdot(h_2\Delta u_2\mathbf{e}_2)$$
$$= (A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3)\cdot(h_2\Delta u_2\mathbf{e}_2) = A_2h_2\Delta u_2$$

則

$$\int_{ML} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = A_2h_2\Delta u_2 + \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2h_2\Delta u_2)\Delta u_3$$

或

(2) $$\int_{LM} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = -A_2h_2\Delta u_2 - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2h_2\Delta u_2)\Delta u_3$$

同理

$$\int_{PM} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = (\text{在}P\text{點的}\mathbf{A})\cdot(h_3\Delta u_3\mathbf{e}_3) = A_3h_3\Delta u_3$$

或

(3) $$\int_{MP} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = -A_3h_3\Delta u_3$$

且

(4) $$\int_{QL} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = A_3h_3\Delta u_3 + \frac{\partial}{\partial u_2}(A_3h_3\Delta u_3)\Delta u_2$$

將(1)，(2)，(3)，(4)相加可得（略去比$\Delta u_2\Delta u_3$高階的微小量）

$$\oint_{C_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial u_2}(A_3h_3\Delta u_3)\Delta u_2 - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2h_2\Delta u_2)\Delta u_3$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2h_2)\right]\Delta u_2\Delta u_3$$

將此值除以S_1的面積$h_2h_3\Delta u_2\Delta u_3$，再取$\Delta u_2$，$\Delta u_3$趨近於0時的極限可得

$$(\text{curl }\mathbf{A})\cdot\mathbf{e}_1 = \frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2h_2)\right]$$

同理，再分別取在P點垂直於$\mathbf{e}_2$和$\mathbf{e}_3$的曲面S_2及S_3，我們可求出(curl $\mathbf{A}$)$\cdot\mathbf{e}_2$及(curl $\mathbf{A}$)$\cdot\mathbf{e}_3$。由此可導出

$$\text{curl }\mathbf{A} = \frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2h_2)\right]$$
$$+ \frac{\mathbf{e}_2}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(A_3h_3)\right]$$

$$+\frac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_2h_2)-\frac{\partial}{\partial u_2}(A_1h_1)\right]=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3\\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3}\\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3\end{vmatrix}$$

當選取P在S_1的中央時亦可導出此結果，計算的過程同6.36題。

7.27 在柱面座標中表示量(a) $\nabla\Phi$，(b) $\nabla\cdot\mathbf{A}$，(c) $\nabla\times\mathbf{A}$，(d) $\nabla^2\Phi$。

解 對柱面座標(ρ,ϕ,z)而言，

$$u_1=\rho,\ u_2=\phi,\ u_3=z;\quad \mathbf{e}_1=\mathbf{e}_\rho,\ \mathbf{e}_2=\mathbf{e}_\phi,\ \mathbf{e}_3=\mathbf{e}_z;$$

且

$$h_1=h_\rho=1,\quad h_2=h_\phi=\rho,\quad h_3=h_z=1$$

(a)
$$\nabla\Phi=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\mathbf{e}_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\mathbf{e}_2+\frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\mathbf{e}_3$$
$$=\frac{1}{1}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi+\frac{1}{1}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{e}_z$$
$$=\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

(b)
$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1)+\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1A_2)+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right]$$
$$=\frac{1}{(1)(\rho)(1)}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\Big((\rho)(1)A_\rho\Big)+\frac{\partial}{\partial\phi}\Big((1)(1)A_\phi\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big((1)(\rho)A_z\Big)\right]$$
$$=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho)+\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial}{\partial z}(\rho A_z)\right]$$

其中 $\mathbf{A}=A_\rho\mathbf{e}_1+A_\phi\mathbf{e}_2+A_z\mathbf{e}_3$, i.e. $A_1=A_\rho$, $A_2=A_\phi$, $A_3=A_z$.

(c)
$$\nabla\times\mathbf{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3\\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3}\\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3\end{vmatrix}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\mathbf{e}_\rho & \rho\mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z\end{vmatrix}$$
$$=\frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial z}(\rho A_\phi)\right)\mathbf{e}_\rho+\left(\rho\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\rho\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\phi+\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi)-\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right)\mathbf{e}_z\right]$$

(d)
$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{(1)(\rho)(1)}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{(\rho)(1)}{(1)}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{(1)(1)}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{(1)(\rho)}{(1)}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

7.28 用球面座標表示(a) $\nabla\times\mathbf{A}$ 及(b) $\nabla^2\psi$ 。

解 此時 $u_1=r,\ u_2=\theta,\ u_3=\phi$； $\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_r,\ \mathbf{e}_2=\mathbf{e}_\theta,\ \mathbf{e}_3=\mathbf{e}_\phi$； $h_1=h_r=1,\ h_2=h_\theta=r,\ h_3=h_\phi=r\sin\theta$.

$$(a)\quad \nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{(1)(r)(r\sin\theta)}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r\sin\theta\,\mathbf{e}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta\,A_\phi \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\,A_\phi)-\frac{\partial}{\partial\phi}(rA_\theta)\right\}\mathbf{e}_r\right.$$

$$\left.+\left\{\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\,A_\phi)\right\}r\mathbf{e}_\theta+\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right\}r\sin\theta\,\mathbf{e}_\phi\right]$$

$$(b)\quad \nabla^2\psi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{(1)(r)(r\sin\theta)}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{(r)(r\sin\theta)}{(1)}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{(r\sin\theta)(1)}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{(1)(r)}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right]$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

7.29 用拋物柱面座標寫出拉卜拉士方程式。

解 由 7.8 (b)題，

$$u_1=u,\ u_2=v,\ u_3=z;\quad h_1=\sqrt{u^2+v^2},\ h_2=\sqrt{u^2+v^2},\ h_3=1$$

則

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{u^2+v^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left((u^2+v^2)\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{u^2+v^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

而拉卜拉士方程式爲 $\nabla^2\psi=0$ 或

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}+(u^2+v^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0$$

7.30 用橢圓柱面座標表示熱傳導方程式 $\dfrac{\partial U}{\partial t}=\kappa\nabla^2U$ 。

答 此時 $u_1=u,\ u_2=v,\ u_3=z$； $h_1=h_2=a\sqrt{\sinh^2 u+\sin^2 v}$， $h_3=1$。則

$$\nabla^2 U = \frac{1}{a^2(\sinh^2 u+\sin^2 v)}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(a^2(\sinh^2 u+\sin^2 v)\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{a^2(\sinh^2 u+\sin^2 v)}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\right]+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

熱傳導方程式為

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa\left\{\frac{1}{a^2(\sinh^2 u+\sin^2 v)}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\right]+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right\}$$

曲面曲線座標

7.31 證明在曲面 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ 上的弧長元的平方可寫成

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

答 我們有

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}dv$$

則

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}du^2 + 2\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}du\,dv + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}dv^2 \\ &= E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \end{aligned}$$

7.32 證明曲面 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ 的面積元為

$$dS = \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

答 面積元為

$$dS = \left|\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}du\right)\times\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}dv\right)\right| = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|du\,dv$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)}\,du\,dv$$

在根號底下的量等於（參閱2.48題）

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right) = EG-F^2$$

故得出所要求之結果。

在一般座標系上的其他問題

7.33 令 A 爲對兩個一般曲線座標系 (u_1, u_2, u_3) 及 $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ 定義的已知向量，求此向量在兩座標系中逆變分量的關係。

習 假設由直角座標系 (x, y, z) 轉變至 (u_1, u_2, u_3) 及 $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ 的座標變換方程式爲

$$(1)\quad \begin{cases} x = x_1(u_1,u_2,u_3), & y = y_1(u_1,u_2,u_3), & z = z_1(u_1,u_2,u_3) \\ x = x_2(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3), & y = y_2(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3), & z = z_2(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3) \end{cases}$$

則存在一個直接由 (u_1, u_2, u_3) 轉換至 $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ 的變換式

$$(2)\quad u_1 = u_1(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3), \quad u_2 = u_2(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3), \quad u_3 = u_3(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3)$$

反之亦然。由(1)

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}du_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 du_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 du_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 du_3$$

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{u}_1}d\bar{u}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{u}_2}d\bar{u}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{u}_3}d\bar{u}_3 = \bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 d\bar{u}_1 + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_2 d\bar{u}_2 + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_3 d\bar{u}_3$$

則

$$(3)\quad \boldsymbol{\alpha}_1 du_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 du_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 du_3 = \bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 d\bar{u}_1 + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_2 d\bar{u}_2 + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_3 d\bar{u}_3$$

由(2)，

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_1}d\bar{u}_1 + \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_2}d\bar{u}_2 + \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_3}d\bar{u}_3$$

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_1}d\bar{u}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_2}d\bar{u}_2 + \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_3}d\bar{u}_3$$

$$du_3 = \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_1}d\bar{u}_1 + \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_2}d\bar{u}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_3}d\bar{u}_3$$

將其代入(3)並將等號兩邊 $d\bar{u}_1$，$d\bar{u}_2$，$d\bar{u}_3$ 的係數相等，可得出

$$(4)\quad \begin{cases} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_1} + \boldsymbol{\alpha}_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_1} + \boldsymbol{\alpha}_3 \dfrac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_1} \\ \bar{\boldsymbol{\alpha}}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_2} + \boldsymbol{\alpha}_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_2} + \boldsymbol{\alpha}_3 \dfrac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_2} \\ \bar{\boldsymbol{\alpha}}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_3} + \boldsymbol{\alpha}_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_3} + \boldsymbol{\alpha}_3 \dfrac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_3} \end{cases}$$

現在 A 在兩座標系中可表示成

$$\mathbf{A} = C_1\boldsymbol{\alpha}_1 + C_2\boldsymbol{\alpha}_2 + C_3\boldsymbol{\alpha}_3 \quad 及 \quad \mathbf{A} = \bar{C}_1\bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \bar{C}_2\bar{\boldsymbol{\alpha}}_2 + \bar{C}_3\bar{\boldsymbol{\alpha}}_3$$

其中C_1，C_2，C_3及$\overline{C}_1$，$\overline{C}_2$，$\overline{C}_3$為**A**在兩座標系中的逆變分量，將(4)代入(5)中

$$C_1\boldsymbol{\alpha}_1 + C_2\boldsymbol{\alpha}_2 + C_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \overline{C}_1\overline{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \overline{C}_2\overline{\boldsymbol{\alpha}}_2 + \overline{C}_3\overline{\boldsymbol{\alpha}}_3$$

$$(\overline{C}_1\frac{\partial u_1}{\partial \overline{u}_1} + \overline{C}_2\frac{\partial u_1}{\partial \overline{u}_2} + \overline{C}_3\frac{\partial u_1}{\partial \overline{u}_3})\boldsymbol{\alpha}_1 + (\overline{C}_1\frac{\partial u_2}{\partial \overline{u}_1} + \overline{C}_2\frac{\partial u_2}{\partial \overline{u}_2} + \overline{C}_3\frac{\partial u_2}{\partial \overline{u}_3})\boldsymbol{\alpha}_2 + (\overline{C}_1\frac{\partial u_3}{\partial \overline{u}_1} + \overline{C}_2\frac{\partial u_3}{\partial \overline{u}_2} + \overline{C}_3\frac{\partial u_3}{\partial \overline{u}_3})\boldsymbol{\alpha}_3$$

則

$$(6)\quad \begin{cases} C_1 = \overline{C}_1\dfrac{\partial u_1}{\partial \overline{u}_1} + \overline{C}_2\dfrac{\partial u_1}{\partial \overline{u}_2} + \overline{C}_3\dfrac{\partial u_1}{\partial \overline{u}_3} \\ C_2 = \overline{C}_1\dfrac{\partial u_2}{\partial \overline{u}_1} + \overline{C}_2\dfrac{\partial u_2}{\partial \overline{u}_2} + \overline{C}_3\dfrac{\partial u_2}{\partial \overline{u}_3} \\ C_3 = \overline{C}_1\dfrac{\partial u_3}{\partial \overline{u}_1} + \overline{C}_2\dfrac{\partial u_3}{\partial \overline{u}_2} + \overline{C}_3\dfrac{\partial u_3}{\partial \overline{u}_3} \end{cases}$$

或簡單的記為

$$(7)\quad C_p = \overline{C}_1\frac{\partial u_p}{\partial \overline{u}_1} + \overline{C}_2\frac{\partial u_p}{\partial \overline{u}_2} + \overline{C}_3\frac{\partial u_p}{\partial \overline{u}_3} \qquad p=1,2,3$$

再簡化為

$$(8)\quad C_p = \sum_{q=1}^{3}\overline{C}_q\frac{\partial u_p}{\partial \overline{u}_q} \qquad p=1,2,3$$

同理，將座標交換可得

$$(9)\quad \overline{C}_p = \sum_{q=1}^{3}C_q\frac{\partial \overline{u}_p}{\partial u_q} \qquad p=1,2,3$$

上面的結果使我們可以採用下面的定義。若在一座標系（u_1，u_2，u_3）中的三個量C_1，C_2，C_3與另一座標系（$\overline{u}_1$，$\overline{u}_2$，$\overline{u}_3$）中的三個量$\overline{C}_1$，$\overline{C}_2$，$\overline{C}_3$間的關係式為方程式(6)，(7)，(8)，(9)，則這些稱為一**逆變向量的分量**(components of contravariant vector)或**一階逆變張量**(contravariant tensor of the first rank)。

7.34 對**A**的協變分量重作7.33題。

解 令**A**在座標系（u_1，u_2，u_3）及（$\overline{u}_1$，$\overline{u}_2$，$\overline{u}_3$）中的協變分量分別為c_1，c_2，c_3及$\overline{c}_1$，$\overline{c}_2$，$\overline{c}_3$。則

$$(1)\quad \mathbf{A} = c_1\nabla u_1 + c_2\nabla u_2 + c_3\nabla u_3 = \overline{c}_1\nabla\overline{u}_1 + \overline{c}_2\nabla\overline{u}_2 + \overline{c}_3\nabla\overline{u}_3$$

由於$\overline{u}_p=\overline{u}_p(u_1, u_2, u_3)$，$p=1, 2, 3$，所以

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial x} = \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_3}\dfrac{\partial u_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial y} = \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial y} + \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial y} + \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_3}\dfrac{\partial u_3}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial z} = \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial z} + \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial z} + \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_3}\dfrac{\partial u_3}{\partial z} \end{cases} \qquad p = 1,2,3$$

同時

$$(3)\quad c_1\nabla u_1 + c_2\nabla u_2 + c_3\nabla u_3 = \left(c_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + c_2\frac{\partial u_2}{\partial x} + c_3\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(c_1\frac{\partial u_1}{\partial y} + c_2\frac{\partial u_2}{\partial y} + c_3\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(c_1\frac{\partial u_1}{\partial z} + c_2\frac{\partial u_2}{\partial z} + c_3\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)\mathbf{k}$$

且

$$(4)\quad \bar{c}_1\nabla \bar{u}_1 + \bar{c}_2\nabla \bar{u}_2 + \bar{c}_3\nabla \bar{u}_3 = \left(\bar{c}_1\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \bar{c}_2\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} + \bar{c}_3\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\bar{c}_1\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} + \bar{c}_2\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} + \bar{c}_3\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\bar{c}_1\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial z} + \bar{c}_2\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial z} + \bar{c}_3\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial z}\right)\mathbf{k}$$

將(3)及(4)中 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ 的係數相等，

$$(5)\quad \begin{cases} c_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + c_2\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + c_3\dfrac{\partial u_3}{\partial x} = \bar{c}_1\dfrac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \bar{c}_2\dfrac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} + \bar{c}_3\dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial x} \\ c_1\dfrac{\partial u_1}{\partial y} + c_2\dfrac{\partial u_2}{\partial y} + c_3\dfrac{\partial u_3}{\partial y} = \bar{c}_1\dfrac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} + \bar{c}_2\dfrac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} + \bar{c}_3\dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial y} \\ c_1\dfrac{\partial u_1}{\partial z} + c_2\dfrac{\partial u_2}{\partial z} + c_3\dfrac{\partial u_3}{\partial z} = \bar{c}_1\dfrac{\partial \bar{u}_1}{\partial z} + \bar{c}_2\dfrac{\partial \bar{u}_2}{\partial z} + \bar{c}_3\dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial z} \end{cases}$$

將 $p=1$, 2 , 3 之方程式(2)代入(5)中任一方程式 ，並將各邊 $\dfrac{\partial u_1}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u_2}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u_3}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u_1}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u_2}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u_3}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u_1}{\partial z}$, $\dfrac{\partial u_2}{\partial z}$, $\dfrac{\partial u_3}{\partial z}$ 的係數相等，可得

$$(6)\quad \begin{cases} c_1 = \bar{c}_1\dfrac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_1} + \bar{c}_2\dfrac{\partial \bar{u}_2}{\partial u_1} + \bar{c}_3\dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial u_1} \\ c_2 = \bar{c}_1\dfrac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_2} + \bar{c}_2\dfrac{\partial \bar{u}_2}{\partial u_2} + \bar{c}_3\dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial u_2} \\ c_3 = \bar{c}_1\dfrac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_3} + \bar{c}_2\dfrac{\partial \bar{u}_2}{\partial u_3} + \bar{c}_3\dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial u_3} \end{cases}$$

其可寫成

$$(7)\quad c_p = \bar{c}_1\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_p} + \bar{c}_2\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial u_p} + \bar{c}_3\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial u_p} \qquad p = 1,2,3$$

或

(8) $$c_p = \sum_{q=1}^{3} \bar{c}_q \frac{\partial \bar{u}_q}{\partial u_p} \qquad p = 1,2,3$$

同理，我們可以證明

(9) $$\bar{c}_p = \sum_{q=1}^{3} c_q \frac{\partial u_q}{\partial \bar{u}_p} \qquad p = 1,2,3$$

上面的結果使我們可以採用下面的定義：若在座標系（u_1，u_2，u_3）中的三個量 c_1，c_2，c_3 與另一座標系（$\bar{u}_1$，$\bar{u}_2$，$\bar{u}_3$）中之三個量 $\bar{c}_1$，$\bar{c}_2$，$\bar{c}_3$ 間的關係式爲方程式(6)，(7)，(8)，(9)，則這些量我們稱爲一**協變向量的分量**（components of a covariant vector）或**一階協變張量**（covariant tensor of the first rank）。

將此題與 7.33 題的觀念推廣至更高維空間，並將向量的觀念推廣，就將我們帶入第 8 章將要討論的**張量分析**（tensor analysis）。在推廣的過程中，利用簡明的符號將基本觀念用緊緻的形式來表示十分方便。然而，我們必須記住，不論我們採用什麼符號，第 8 章所討論的基本觀念與本章所討論的有密切的關聯。

7.35 (a) 證明在一般座標（u_1，u_2，u_3）中，

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}\right)^2$$

其中 g_{pq} 爲在 ds^2 中 $du_p du_q$ 的係數（參閱 7.17 題）。

(b) 證明在一般座標系中的體積元爲 $\sqrt{g}\, du_1 du_2 du_3$。

解 (a) 由 7.17 題，

(1) $$g_{pq} = \boldsymbol{\alpha}_p \cdot \boldsymbol{\alpha}_q = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_p} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_q} = \frac{\partial x}{\partial u_p}\frac{\partial x}{\partial u_q} + \frac{\partial y}{\partial u_p}\frac{\partial y}{\partial u_q} + \frac{\partial z}{\partial u_p}\frac{\partial z}{\partial u_q} \qquad p, q = 1,2,3$$

則利用行列式乘法定理

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 & a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3 & a_1C_1 + a_2C_2 + a_3C_3 \\ b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 & b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 & b_1C_1 + b_2C_2 + b_3C_3 \\ c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 & c_1B_1 + c_2B_2 + c_3B_3 & c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3 \end{vmatrix}$$

可得

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}\right)^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial x}{\partial u_3} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_3} \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

(b) 體積元爲

$$dV = \left|\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}du_1\right)\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}du_2\right)\times\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}du_3\right)\right| = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}\right| du_1\,du_2\,du_3$$

$$= \sqrt{g}\;du_1\,du_2\,du_3 \quad (\text{由(a)})$$

注意 $\sqrt{g}$ 爲 x，y，z 對 u_1，u_2，u_3 之亞可比行列式的絕對值（參閱 7.13 題）。

補充題

補充題的答案列於本章末。

7.36 對(a)橢圓柱面座標，(b)雙極座標及(c)拋物柱面座標，描繪並敍述座標曲面和座標曲線。

7.37 求由(a)球面座標至直角座標，(b)球面座標至柱面座標的座標變換。

7.38 用球面座標表示下列軌跡：

(a) 球 $x^2+y^2+z^2=9$ (c) 拋物面 $z=x^2+y^2$

(b) 圓錐 $z^2=3(x^2+y^2)$ (d) 平面 $z=0$ (e) 平面 $y=x$

7.39 若 ρ，ϕ，z 爲柱面座標，描述下列軌跡並寫出其直角座標方程式：(a) $\rho=4$，$z=0$；(b) $\rho=4$；(c) $\phi=\pi/2$；(d) $\phi=\pi/3$，$z=1$。

7.40 若 u，v，z 爲橢圓柱面座標，其中 $a=4$，描述下列軌跡並寫出其直角座標方程式：

(a) $v=\pi/4$; (b) $u=0,\ z=0$; (c) $u=\ln 2,\ z=2$; (d) $v=0,\ z=0$.

7.41 若 u，v，z 爲拋物柱面座標，畫出下列曲線或區域：
(a) $u=2,\ z=0$；(b) $v=1,\ z=2$；(c) $1\leqq u\leqq 2,\ 2\leqq v\leqq 3,\ z=0$；(d) $1<u<2,\ 2<v<3,\ z=0$.

7.42 (a) 用 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$ 表示球面座標系中的單位向量 $\mathbf{e}_r$，$\mathbf{e}_\theta$，$\mathbf{e}_\phi$。
(b) 用 $\mathbf{e}_r$，$\mathbf{e}_\theta$，$\mathbf{e}_\phi$ 表示 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$。

7.43 用球面座標表示向量 $\mathbf{A}=2y\mathbf{i}-z\mathbf{j}+3x\mathbf{k}$，並決定 A_r，A_θ 及 A_ϕ。

7.44 證明球面座標系爲正交座標系。

7.45 證明(a)拋物柱面座標，(b)橢圓柱面座標，(c)扁球座標爲正交。

7.46 證明 $\dot{\mathbf{e}}_r=\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta+\sin\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$，$\dot{\mathbf{e}}_\theta=-\dot{\theta}\mathbf{e}_r+\cos\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$，$\dot{\mathbf{e}}_\phi=-\sin\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_r-\cos\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\theta$.

7.47 用球面座標表示一質點的速度 $\mathbf{v}$ 及加速度 $\mathbf{a}$。

7.48 在(a)拋物面座標，(b)橢圓柱面座標，(c)扁球座標求弧長元平方及對應的刻度因數。

7.49 在(a)拋物面座標，(b)橢圓柱面座標，(c)雙極座標，求體積元。

7.50 在長球座標中求(a)刻度因數及(b)體積元 dV。

7.51 導出在(a)橢面座標，(b)雙極座標中的刻度因數表示式。

7.52 在(a)柱面座標，(b)球面座標，(c)拋物面座標，求一體積元的面積元。

7.53 證明一曲線座標系爲正交的充要條件爲當 $p\neq q$ 時，$g_{pq}=0$。

7.54 求(a)柱面座標，(b)球面座標，(c)拋物柱面座標，(d)橢圓柱面座標，(e)扁球座標的亞可比行列式 $J\left(\dfrac{x,y,z}{u_1,u_2,u_3}\right)$。

7.55 求 $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$，其中 V 爲由 $z=x^2+y^2$ 及 $z=8-(x^2+y^2)$ 所包圍的區域。提示：利用柱面座標。

7.56 求由球 $x^2+y^2+z^2=16$ 及圓錐 $z^2=x^2+y^2$ 所圍之兩塊區域中較小塊區域的體積。

7.57 利用球面座標求由半徑 a 之球及一與此球球心距離爲 h 之平面所交出之兩塊區域中較小塊區域的體積。

7.58 (a) 對座標系

$$x^2-y^2=2u_1\cos u_2,\quad xy=u_1\sin u_2,\quad z=u_3$$

敘述其座標曲面及座標曲線。
(b) 證明此座標系爲正交。

(c) 求此座標系之 $J\left(\frac{x, y, z}{u_1, u_2, u_3}\right)$。

(d) 證明 u_1 及 u_2 與柱面座標中的 ρ 及 ϕ 有關，並決定此關係。

7.59 求由 $x^2-y^2=2$，$x^2-y^2=4$，$xy=1$，$xy=2$，$z=1$ 及 $z=3$ 所包圍之區域相對於 z 軸的慣性矩，假設密度為一常數 κ。提示：令 $x^2-y^2=2u$，$xy=v$。

7.60 在(a)柱面座標，(b)球面座標，(c)拋物面座標中，求 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}$，$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}$，$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}$，$\nabla u_1$，$\nabla u_2$，$\nabla u_3$。證明在這些座標系中 $\mathbf{e}_1=\mathbf{E}_1$，$\mathbf{e}_2=\mathbf{E}_2$，$\mathbf{e}_3=\mathbf{E}_3$。

7.61 給一座標變換 $u_1=xy$，$2u_2=x^2+y^2$，$u_3=z$。(a)證明此座標系非正交，(b)求 $J\left(\frac{x, y, z}{u_1, u_2, u_3}\right)$，(c)求 ds^2。

7.62 用拋物柱面座標求 $\nabla\Phi$，div $\mathbf{A}$ 及 curl $\mathbf{A}$。

7.63 用球面座標表示(a) $\nabla\psi$ 及(b) $\nabla\cdot\mathbf{A}$。

7.64 在扁球座標中求 $\nabla^2\psi$。

7.65 用橢圓柱面座標寫出方程式 $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\Phi$。

7.66 用長球座標表示馬克士威方程式 $\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$。

7.67 用拋物柱面座標表示量子力學中的Schroedinger方程式 $\nabla^2\psi+\frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V(x, y, z))\psi=0$，其中 m，h，E 均為常數。

7.68 用拋物面座標寫出拉卜拉士方程式。

7.69 若 U 分別與(a) ϕ，(b) ϕ 及 θ，(c) r 及 t，(d) ϕ，θ 及 t，獨立，用球面座標表示熱方程式 $\frac{\partial U}{\partial t}=\kappa\nabla^2 U$。

7.70 求在一半徑為 a 之球上的弧長元。

7.71 證明在任一正交曲線座標系中，div curl $\mathbf{A}=0$ 且 curl grad $\Phi=\mathbf{0}$。

7.72 證明在曲面 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v)$ 中任一給定區域 R 的表面積為 $\iint_R\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$。利用此結果決定一球的表面積。

7.73 證明在曲面 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v)$ 上任一處長度為 p 的法向量為

$$A = \pm p(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v})/\sqrt{EG - F^2}$$

7.74 (a) 描述平面變換 $x = x(u, v)$，$y = y(u, v)$。

(b) 在什麼條件下，u，v 座標線為正交？

7.75 令 (x, y) 為一點 P 在直角 xy 平面上的座標，(u, v) 為點 Q 在直角 uv 平面上的座標，若 $x = x(u, v)$，$y = y(u, v)$，則我們說在 P 與 Q 之間存在一個對應（correspondence）或映射（mapping）。

(a) 若 $x = 2u + v$，$y = u - 2v$，證明在 xy 平面中的直線對應到 uv 平面中的直線。

(b) 由 $x = 0$，$x = 5$，$y = 0$ 及 $y = 5$ 所圍的正方形在 uv 平面上對應的是什麼?

(c) 計算 $J\left(\frac{x, y}{u, v}\right)$，並證明此與正方形的面積及其在 uv 平面上映像之面積的比例有關。

7.76 若 $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$，$y = uv$，決定 xy 平面中由 $x = 0$，$x = 1$，$y = 0$，$y = 1$ 所圍之正方形在 uv 平面中的映像。

7.77 證明 F 與 G 在適當的條件下，

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(x+y)} F(x) G(y)\, dx\, dy = \int_0^\infty e^{-st} \left\{\int_0^t F(u) G(t-u)\, du\right\} dt$$

提示：利用由 xy 平面至 vt 平面的變換 $x + y = t$，$x = v$。此結果在拉卜拉士變換定理中非常重要。

7.78 (a) 若 $x = 3u_1 + u_2 - u_3$，$y = u_1 + 2u_2 + 2u_3$，$z = 2u_1 - u_2 - u_3$，求由 $x = 0$，$x = 15$，$y = 0$，$y = 10$，$z = 0$，$z = 5$ 所包圍的立方體體積及其在 $u_1 u_2 u_3$ 直角座標系中映像的體積。

(b) 將此二體積之比例與此轉換的亞可比行列式關聯起來。

7.79 令 (x, y, z) 及 (u_1, u_2, u_3) 分別為一點的直角座標及曲線座標。

(a) 若 $x = 3u_1 + u_2 - u_3$，$y = u_1 + 2u_2 + 2u_3$，$z = 2u_1 - u_2 - u_3$，$u_1 u_2 u_3$ 座標系是否為正交？

(b) 求此座標系中的 ds^2 及 g。

(c) 此題與前一題的關係為何？

7.80 若 $x = u_1^2 + 2$，$y = u_1 + u_2$，$z = u_3^2 - u_1$ 求(a) g，(b) $J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)}$。證明 $J^2 = g$。

補充題解答

7.36 (a) $u=c_1$ 及 $v=c_2$ 分別爲橢圓及雙曲柱面，z 軸爲共同軸，$z=c_3$ 爲平面。見182頁圖7。

(b) $u=c_1$ 及 $v=c_2$ 爲圓柱，其與 xy 平面的交集爲圓，圓心分別在 y 軸及 x 軸上。柱面 $u=c_1$ 均通過點 $(-a,0,0)$ 及 $(a,0,0)$，$z=c_3$ 爲平面。見184頁圖8。

(c) $u=c_1$ 及 $v=c_2$ 爲拋物柱面，其在 xy 平面上的軌跡爲相互正交的同軸拋物線，頂點均在 x 軸上，但在原點的不同邊。$z=c_3$ 爲平面。見181頁圖6。

座標曲線爲座標曲面的交集。

7.37 (a) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\theta=\arctan\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$, $\phi=\arctan\dfrac{y}{x}$

(b) $r=\sqrt{\rho^2+z^2}$, $\theta=\arctan\dfrac{\rho}{z}$, $\phi=\phi$

7.38 (a) $r=3$, (b) $\theta=\pi/6$, (c) $r\sin^2\theta=\cos\theta$, (d) $\theta=\pi/2$,
(e) 平面 $y=x$ 由兩個半平面 $\phi=\pi/4$ 及 $\phi=5\pi/4$ 所組成。

7.39 (a) xy 平面中的圓 $x^2+y^2=16$，$z=0$。(b) 圓柱 $x^2+y^2=16$，其中心軸爲 z 軸。(c) yz 平面，其中 $y\geq 0$。(d) 直線 $y=\sqrt{3}\,x$，$z=1$，其中 $x\geqq 0$，$y\geqq 0$。

7.40 (a) 雙曲柱面 $x^2-y^2=8$。(b) 連接點 $(-4,0,0)$ 及 $(4,0,0)$ 的線段，即 $x=t$，$y=0$，$z=0$，$-4\leq t\leq 4$。(c) 橢圓 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$，$z=2$。(d) x 軸的一部分，$x\geq 4$，$y=0$，$z=0$。

7.41 (a) 拋物線 $y^2=-8(x-2)$，$z=0$。(b) 拋物線 $y^2=2x+1$，$z=2$。(c) xy 平面中由拋物線 $y^2=-2(x-1/2)$，$y^2=-8(x-2)$，$y^2=8(x+2)$ 及 $y^2=18(x+9/2)$ 所包圍的區域及其邊界。(d) 與(c)同但不包含邊界。

7.42 (a)
$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{j} + \cos\theta\,\mathbf{k}\\
\mathbf{e}_\theta &= \cos\theta\cos\phi\,\mathbf{i} + \cos\theta\sin\phi\,\mathbf{j} - \sin\theta\,\mathbf{k}\\
\mathbf{e}_\phi &= -\sin\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j}
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
\mathbf{i} &= \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_r + \cos\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_\theta - \sin\phi\,\mathbf{e}_\phi\\
\mathbf{j} &= \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_r + \cos\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_\theta + \cos\phi\,\mathbf{e}_\phi\\
\mathbf{k} &= \cos\theta\,\mathbf{e}_r - \sin\theta\,\mathbf{e}_\theta
\end{aligned}$$

7.43 $\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_\phi \mathbf{e}_\phi$ 其中

$A_r = 2r\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi - r\sin\theta\cos\theta\sin\phi + 3r\sin\theta\cos\theta\cos\phi$

$A_\theta = 2r\sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi - r\cos^2\theta\sin\phi - 3r\sin^2\theta\cos\phi$

$A_\phi = -2r\sin\theta\sin^2\phi - r\cos\theta\cos\phi$

7.47 $\mathbf{v} = v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta + v_\phi\mathbf{e}_\phi$ 其中 $v_r = \dot{r},\ v_\theta = r\dot{\theta},\ v_\phi = r\sin\theta\,\dot{\phi}$

$\mathbf{a} = a_r\mathbf{e}_r + a_\theta\mathbf{e}_\theta + a_\phi\mathbf{e}_\phi$ 其中 $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2$,

$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2$,

$a_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi})$

7.48 (a) $ds^2 = (u^2+v^2)(du^2+dv^2) + u^2v^2\,d\phi^2$, $h_u = h_v = \sqrt{u^2+v^2}$, $h_\phi = uv$

(b) $ds^2 = a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)(du^2+dv^2) + dz^2$, $h_u = h_v = a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}$, $h_z = 1$

(c) $ds^2 = a^2(\sinh^2\xi + \sin^2\eta)(d\xi^2 + d\eta^2) + a^2\cosh^2\xi\cos^2\eta\,d\phi^2$,

$h_\xi = h_\eta = a\sqrt{\sinh^2\xi + \sin^2\eta}$, $h_\phi = a\cosh\xi\cos\eta$

7.49 (a) $uv(u^2+v^2)\,du\,dv\,d\phi$, (b) $a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)\,du\,dv\,dz$, (c) $\dfrac{a^2\,du\,dv\,dz}{(\cosh v - \cos u)^2}$

7.50 (a) $h_\xi = h_\eta = a\sqrt{\sinh^2\xi + \sin^2\eta}$, $h_\phi = a\sinh\xi\sin\eta$

(b) $a^3(\sinh^2\xi + \sin^2\eta)\sinh\xi\sin\eta\,d\xi\,d\eta\,d\phi$

7.52 (a) $\rho\,d\rho\,d\phi$, $\rho\,d\phi\,dz$, $d\rho\,dz$

(b) $r\sin\theta\,dr\,d\phi$, $r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi$, $r\,dr\,d\theta$

(c) $(u^2+v^2)\,du\,dv$, $uv\sqrt{u^2+v^2}\,du\,d\phi$, $uv\sqrt{u^2+v^2}\,dv\,d\phi$

7.54 (a) ρ, (b) $r^2\sin\theta$, (c) u^2+v^2, (d) $a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)$, (e) $a^3(\sinh^2\xi + \sin^2\eta)\sinh\xi\sin\eta$

7.55 $\frac{256\pi}{15}$ **7.56** $\frac{6\pi(2-\sqrt{2})}{3}$ **7.57** $\frac{\pi}{3}(2a^3 - 3a^2h + h^3)$

7.58 (c) $\frac{1}{2}$; (d) $u_1 = \frac{1}{2}\rho^2$, $u_2 = 2\phi$ **7.59** 2κ

7.60 (a) $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho} = \cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\,\mathbf{j}$, $\nabla\rho = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\,\mathbf{j}$

$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\rho\sin\phi\,\mathbf{i} + \rho\cos\phi\,\mathbf{j}$, $\nabla\phi = \frac{-\sin\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j}}{\rho}$

$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}$, $\nabla z = \mathbf{k}$

(b) $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{j} + \cos\theta\,\mathbf{k}$

$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = r\cos\theta\cos\phi\,\mathbf{i} + r\cos\theta\sin\phi\,\mathbf{j} - r\sin\theta\,\mathbf{k}$

$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -r\sin\theta\sin\phi\,\mathbf{i} + r\sin\theta\cos\phi\,\mathbf{j}$

$\nabla r = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{j} + \cos\theta\,\mathbf{k}$

$$\nabla\theta = \frac{xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} - (x^2+y^2)\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\cos\theta\,\cos\phi\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\sin\phi\,\mathbf{j} - \sin\theta\,\mathbf{k}}{r}$$

$$\nabla\phi = \frac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{x^2 + y^2} = \frac{-\sin\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j}}{r\sin\theta}$$

(c) $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j}$, $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -v\,\mathbf{i} + u\,\mathbf{j}$, $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}$

$$\nabla u = \frac{u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j}}{u^2 + v^2}, \quad \nabla v = \frac{-v\,\mathbf{i} + u\,\mathbf{j}}{u^2 + v^2}, \quad \nabla z = \mathbf{k}$$

7·61 (b) $\dfrac{1}{y^2-x^2}$, (c) $ds^2 = \dfrac{(x^2+y^2)(du_1^2+du_2^2) - 4xy\,du_1du_2}{(x^2-y^2)^2} + du_3^2$

$$= \frac{u_2(du_1^2+du_2^2) - 2u_1\,du_1du_2}{2(u_2^2-u_1^2)} + du_3^2$$

7·62

$$\nabla\Phi = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\mathbf{e}_u + \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\mathbf{e}_v + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{u^2+v^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{u^2+v^2}\,A_u\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{u^2+v^2}\,A_v\right)\right] + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{curl} A = \frac{1}{u^2+v^2}\left[\left\{\frac{\partial A_z}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{u^2+v^2}\,A_v\right)\right\}\sqrt{u^2+v^2}\,\mathbf{e}_u + \left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{u^2+v^2}\,A_u\right) - \frac{\partial A_z}{\partial u}\right\}\sqrt{u^2+v^2}\,\mathbf{e}_v + \left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{u^2+v^2}\,A_v\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{u^2+v^2}\,A_u\right)\right\}\mathbf{e}_z\right]$$

7·63 (a) $\nabla\psi = \dfrac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\psi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi$

(b) $\nabla\cdot\mathbf{A} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,A_\theta) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$

7·64

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{a^2\cosh\xi\,(\sinh^2\xi + \sin^2\eta)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\cosh\xi\,\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{a^2\cos\eta\,(\sinh^2\xi + \sin^2\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\cos\eta\,\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{a^2\cosh^2\xi\,\cos^2\eta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

7·65 $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} = a^2(\sinh^2u + \sin^2v)\Phi$

7·66

$$\frac{1}{aRS^2}\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}(RE_\phi) - \frac{\partial}{\partial\phi}(SE_\eta)\right\}S\,\mathbf{e}_\xi + \left\{\frac{\partial}{\partial\phi}(SE_\xi) - \frac{\partial}{\partial\xi}(RE_\phi)\right\}S\,\mathbf{e}_\eta + \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(SE_\eta) - \frac{\partial}{\partial\eta}(SE_\xi)\right\}R\,\mathbf{e}_\phi\right]$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial H_\xi}{\partial t}\mathbf{e}_\xi - \frac{1}{c}\frac{\partial H_\eta}{\partial t}\mathbf{e}_\eta - \frac{1}{c}\frac{\partial H_\phi}{\partial t}\mathbf{e}_\phi$$

其中 $R = \sinh\xi \sin\eta$ 且 $S = \sqrt{\sinh^2\xi + \sin^2\eta}$.

7-67 $\frac{1}{u^2+v^2}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right] + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E - W(u,v,z)\right)\psi = 0,$

其中 $W(u,v,z) = V(x,y,z)$.

7-68 $uv^2\frac{\partial}{\partial u}(u\frac{\partial\psi}{\partial u}) + u^2 v\frac{\partial}{\partial v}(v\frac{\partial\psi}{\partial v}) + (u^2+v^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} = 0$

7-69 (a) $\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial U}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta})\right]$

(b) $\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial U}{\partial r})\right]$ (c) $\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}) + \frac{\partial^2 U}{\partial\phi^2} = 0$ (d) $\frac{d}{dr}(r^2\frac{dU}{dr}) = 0$

7-70 $ds^2 = a^2[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2]$

7-74 (b) $\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = 0$

7-78 (a) 750, 75; (b) 亞可比行列式 = 10

7-79 (a) 非正交 (b) $ds^2 = 14du_1^2 + 6du_2^2 + 6du_3^2 + 6du_1du_2 - 6du_1du_3 + 8du_2du_3$, $g = 100$

7-80 (a) $g = 16u_1^2u_3^2$, (b) $J = 4u_1u_3$

第八章

張量分析

8·1 物理定律

一個眞確的物理定律，在用數學方法來敍述時必須與它所使用的任一特定座標系無關。對這方面的硏究，導出了**張量分析**（tensor analysis）這門學科，它在相對論、微分幾何、動力學、彈性學、水力學、電磁學及許多工程科學領域中經常用到。

8·2 N維空間

在三維空間中，一個點可用在一個特定的座標系所決定的一組三個數來代表，稱爲座標。例如，(x, y, z)，(ρ, ϕ, z)，(r, θ, ϕ) 分別代表一點在直角座標系、柱面座標系及球面座標系中的座標。同樣的，在N維空間中的一點，也可以用一組N個數來代表，記作 $(x^1, x^2, \cdots, x^N)$，在此，1，2，⋯，N 並不代表指數，只是當作一個上標，以後你會發現這樣做很方便。

事實上，我們無法具體的看到高於三維空間的點，但這與它存在與否並無關係。

8·3 座標變換

令 $(x^1, x^2, \cdots, x^N)$ 及 $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \cdots, \bar{x}^N)$ 爲一點在兩不同座標系中的座標。假設在這兩組座標間存在N個獨立關係式：

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= \bar{x}^1(x^1, x^2, \ldots, x^N) \\ \bar{x}^2 &= \bar{x}^2(x^1, x^2, \ldots, x^N) \\ \vdots\ &\quad\ \vdots \\ \bar{x}^N &= \bar{x}^N(x^1, x^2, \ldots, x^N) \end{aligned} \tag{1}$$

或簡寫成

$$\bar{x}^k = \bar{x}^k(x^1, x^2, \ldots, x^N) \qquad k = 1, 2, \ldots, N \tag{2}$$

此處我們假設上面所有的函數都是單值、連續並有連續導數。則反過來說對每一組座標 $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \cdots, \bar{x}^N)$ 也會對應到一組唯一的 $(x^1, x^2, \cdots, x^N)$，其關係式爲

(3) $$x^k = x^k(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N) \qquad k = 1, 2, \ldots, N$$

關係式(2)或(3)定義了一個由一座標系至另一座標系間的**座標變換**(transformation of coordinates)。

8-4 求和慣例

在寫一個像 $a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N$ 這樣的表示式時，我們可以簡寫成 $\sum_{j=1}^{N} a_jx^j$。如果我們採用下面的慣例：如果沒有特別說明，在各相加項中若有一指標重覆，我們所要加總的項是將此指標由 1 至 N 變化，此稱爲**求和慣例**(summation convention)。在此慣例下，我們更可將上述的表示式簡寫成 a_jx^j。很明顯地，我們也可以用任一個字母來代替指標 j，例如 p，此時和可寫成 a_px^p。任一個指標如果在求和項中重覆出現，使得求和慣例成立，則稱此指標爲一**啞指標**(dummy index)。

若在一求和項中，一指標只出現一次，則稱此指標爲**自由指標**(free index)，它可用來代表 1，2，…，N 中的任一數，就像(2)或(3)中的 k 一樣，(2)或(3)代表了 N 個方程式。

8-5 逆變與協變向量

若在座標系 $(x^1, x^2, \cdots, x^N)$ 中的 N 個量 $A^1, A^2, \cdots, A^N$ 與另一座標系 $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \cdots, \bar{x}^N)$ 中的 N 個量 $\bar{A}^1, \bar{A}^2, \cdots, \bar{A}^N$ 之間的關係式爲

$$\bar{A}^p = \sum_{q=1}^{N} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} A^q \qquad p = 1, 2, \ldots, N$$

或由慣例可寫成

$$\bar{A}^p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} A^q$$

則它們稱爲一個**逆變向量**(contravariant vector)或**一階(秩)逆變張量**(contravariant tensor of the first rank or first order)。對於此變換以及以後各變換研究的動機，請參看 7.33 及 7.34 題。

若在座標系 $(x^1, x^2, \cdots, x^N)$ 中的 N 個量 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ 與另一座標系 $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \cdots, \bar{x}^N)$ 中的 N 個量 $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \cdots, \bar{A}_N$ 間的關係式爲

$$\bar{A}_p = \sum_{q=1}^{N} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p} A_q \qquad p = 1, 2, \ldots, N$$

或

$$\overline{A}_p = \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^p} A_q$$

則它們稱爲協變張量(covariant vector)或一階(秩)協變張量(covariant tensor of the first rank or first order)。

注意在此我們用上標代表逆變分量，而用下標代表協變分量，至於座標的符號則不如此使用。

在說一個分量爲A^p或A_p的張量時，我們通常說成張量A^p或A_p，這應不會造成混淆。

8·6 逆變、協變及混合張量

若在一座標系$(x^1, x^2, \cdots, x^N)$中的N^2個量A^{qs}與另一座標系$(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \cdots, \overline{x}^N)$中的$N^2$個量$\overline{A}^{pr}$間的關係式爲

$$\overline{A}^{pr} = \sum_{s=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^q} \frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^s} A^{qs} \qquad p, r = 1, 2, \ldots, N$$

或

$$\overline{A}^{pr} = \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^q} \frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^s} A^{qs}$$

則它們稱爲二秩張量的逆變分量(contravariant components of a tensor of the second rank)。

若

$$\overline{A}_{pr} = \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^p} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^r} A_{qs}$$

則此N^2個量A_{qs}稱爲二秩張量的協變分量(covariant components of a tensor of the second rank)。

同理，若

$$\overline{A}_r^p = \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^q} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^r} A_s^q$$

則此N^2個量A_s^q稱爲二秩混合張量的分量(components of a mixed tensor of the second rank)。

8-7 克郎乃克 δ

克郎乃克 δ 的定義爲

$$\delta_k^j = \begin{cases} 0 & 若\ j \neq k \\ 1 & 若\ j = k \end{cases}$$

正如它的符號所示，它是一個二秩混合張量。

8-8 高於二秩的張量

我們很容易的可以定義出高於二秩的張量，例如，若變換關係式爲

$$\bar{A}_{ij}^{prm} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} A_{kl}^{qst}$$

則 A_{kl}^{qst} 爲 5 秩混合張量的分量，其中逆變爲 3 階，協變爲 2 階。

8-9 純量或不變量

假設 ϕ 爲座標 x^k 的函數，$\bar{\phi}$ 爲此函數在某一由 x^k 轉換至座標 $\bar{x}^k$ 之座標變換下的函數值，如果 $\phi = \bar{\phi}$，則 ϕ 稱爲在此座標變換下的**純量**(scalar) 或**不變量**(invariant)。一個純量或不變量也稱爲**一零秩張量**(tensor of rank zero)。

8-10 張量場

若在 N 維空間某一區域中的每一點都對應到一定值張量，則我們說此定義了一個**張量場**(tensor field)。這個張量場是向量場還是純量場由其是一秩還是零秩張量決定。我們應該注意的是，一個張量或張量場並不只是它在某一特定座標系中分量的集合，而是它在任意座標變換下所有可能的集合。

8-11 對稱及反對稱張量

如果一個張量的分量在兩逆變指標或兩協變指標互相交換而保持不變，則稱此張量對此二逆變或協變指標**對稱**(symmetric)，即若 $A_{qs}^{mpr} = A_{qs}^{pmr}$，則此張量對 m 和 p 對稱。若一張量對任二個逆變指標或協變指標均爲對稱，則稱此張量爲**對稱**(symmetric)。

如果一個張量的分量在兩逆變或協變指標互換時變號，則稱此張量對此二逆變或協變指標爲**反對稱**(skew-symmetric)，即若 $A_{qs}^{mpr} = -A_{qs}^{pmr}$，則此張量對 m 及 p 爲**反對稱**(skew-symmetric)。

8-12 張量的基本運算

1. **加法**(addition)　同秩且同型(即有相同數目的協變及逆變指標)的兩個或多個張量的和(sum)還是一個同秩且同型的張量。即若 A_q^{mp} 及 B_q^{mp} 爲張量，則 $C_q^{mp}=A_q^{mp}+B_q^{mp}$ 亦爲一張量。張量的加法有交換律及結合律。
2. **減法**(subtraction)　兩個同秩且同型之張量的差(difference)，亦爲一同秩同型的張量。即若 A_q^{mp} 及 B_q^{mp} 爲張量，則 $D_q^{mp}=A_q^{mp}-B_q^{mp}$ 亦爲一張量。
3. **外乘法**(outer multiplication)　兩個張量的積(product)也是一個張量，它的秩數是兩相乘張量秩數的和。這個積包含了張量分量的一般乘法，稱爲外積(outer product)。例如，$A_q^{pr}B_s^m=C_{qs}^{prm}$ 爲 A_q^{pr} 與 B_s^m 的外積。但是我們要注意並不是每一個張量都可以寫成兩個較低秩張量的積，因此兩張量的相除不一定存在。
4. **收縮**(contraction)　如果一個協變指標與一個逆變指標相等，則在此相等指標上的相加是依求和的慣例而定。此結果爲一小於原張量 2 秩的張量。這個過程稱爲**收縮**(contraction)。例如，在一個五秩張量 A_{qs}^{mpr} 中，令 $r=s$，則可得到一個三秩張量 $A_{qr}^{mpr}=B_q^{mp}$，再令 $p=q$，則可得一個一秩張量 $B_p^{mp}=C^m$。
5. **內乘法**(inner multiplication)　由兩張量的外乘法，再利用收縮則可得到一個新的張量，此張量稱爲所給兩張量的**內積**(inner product)。這個過程稱爲**內乘法**(inner multiplication)。例如，給定兩張量 A_q^{mp} 及 B_{st}^r，其外積爲 $A_q^{mp}B_{st}^r$，令 $q=r$，則可得到內積 $A_r^{mp}B_{st}^r$。若令 $q=r$ 且 $p=s$，則可得到另一個內積 $A_r^{mp}B_{pt}^r$。張量的內乘法與外乘法均有交換律及結合律。
6. **商律**(quotient law)　假如我們不知道一量 X 是否爲一張量。如果 X 與任一張量的內積還是一個張量，則 X 爲一張量。這稱爲**商律**(quotient law)。

8-13 矩 陣

一個 $m\times n$ 階的矩陣就是量 a_{pq} 的一個陣列，a_{pq} 稱爲**元素**(element)，它們被安排成 m 列及 n 行，一般記作

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

若簡寫成 (a_{pq}) 或 $[a_{pq}]$，$p=1,\cdots,m$；$q=1,\cdots,n$。若 $m=n$，則此矩陣稱爲

$m\times m$階方陣(square matrix)或稱爲m階方陣。若$m=1$，則爲一列矩陣(row matrix)或列向量(row vector)；若$n=1$，則爲一行矩陣(column matrix)或行向量(column vector)。

一個方陣中，包含元素a_{11}，a_{22}，…，a_{mm}的對角線，稱爲主對角線(principal or main diagonal)。若一個方陣其主對角線上的元素均爲1，其它元素均爲0，則稱此方陣爲一單位矩陣(unit matrix)，記作I。若一個矩陣中所有的元素均爲零，則稱爲零矩陣(null matrix)，記作O。

8·14 矩陣代數

若$A=(a_{pq})$與$B=(b_{pq})$爲兩個同階$(m\times n)$矩陣，則

1. $A=B$若且唯若$a_{pq}=b_{pq}$。
2. 兩矩陣之和(sum)S及差(difference)D的定義爲

$$S = A+B = (a_{pq}+b_{pq}), \quad D = A-B = (a_{pq}-b_{pq})$$

3. 乘積$P=AB$只有在A的行數n與B的列數相等時才有定義，其結果爲

$$P = AB = (a_{pq})(b_{pq}) = (a_{pr}\, b_{rq})$$

其中 $a_{pr}b_{rq} = \sum_{r=1}^{n} a_{pr}b_{rq}$ （求和慣例）。兩矩陣的乘積若有定義，則稱爲可相乘矩陣(conformable matrices)。

一般來說，矩陣的乘法不可交換，即$AB\neq BA$。但是只要是可相乘矩陣，矩陣的乘法有結合律，即$A(BC)=(AB)C$。同時，分配律也成立，即$A(B+C)=AB+AC$，$(A+B)C=AC+BC$。

4. 一個方陣$A=(a_{pq})$的行列式(determinant)記作$|A|$，$\det A$，$|a_{pq}|$或$\det(a_{pq})$。若$P=AB$，則$|P|=|A||B|$。
5. 一個方陣A的反矩陣A^{-1}(inverse matrix)亦爲一方陣，其滿足$AA^{-1}=I$，其中I爲單位矩陣。A^{-1}存在的充要條件爲$\det A\neq 0$。若$\det A=0$，則A稱爲奇異矩陣(singular matrix)。
6. 矩陣$A=(a_{pq})$與純量λ的乘積記作λA，其爲一矩陣(λa_{pq})，它的每一個元素均爲A的λ倍。
7. A的轉置矩陣(transpose matrix)A^T亦爲一矩陣，其將A的行與列互換而得。因此，若$A=(a_{pq})$，則$A^T=(a_{qp})$。A的轉置矩陣亦記作$\widetilde{A}$。

8-15 線素及計量張量

在直角座標系 (x, y, z) 中，弧長的微分 ds 是由 $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ 得到。在轉換至一般曲線座標系時，此式變爲 $\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g_{pq}\,du_p du_q$。這種空間稱爲三維歐氏空間 (three dimensional Euclidean spaces)。

由此可立刻推廣至座標 $(x^1, x^2, \cdots, x^N)$ 的 N 維空間。我們用二次形來定義此空間中的線素 (line element) ds，稱爲計量式 (metric form 或 metric)，

$$ds^2 = \sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N} g_{pq}\, dx^p\, dx^q$$

或利用求和慣例，寫成

$$ds^2 = g_{pq}\, dx^p\, dx^q$$

在特殊的情況下，若存在一個由 x^j 至 $\bar{x}^k$ 的轉換，使得計量式變成 $(d\bar{x}^1)^2+(d\bar{x}^2)^2+\cdots+(d\bar{x}^N)^2$ 或 $d\bar{x}^k d\bar{x}^k$，則此空間稱爲 N 維歐氏空間。而在一般情況，此空間稱爲黎曼空間 (Riemannian space)。

量 g_{pq} 是一個二秩協變張量的分量，此張量稱爲計量張量 (metric tensor) 或基本張量 (fundamental tensor)。我們可以恒將此張量選定爲對稱的 (見 8.29 題)。

8-16 共軛或倒數張量

若 $g=|g_{pq}|$ 代表元素 g_{pq} 的行列式並假設 $g\neq 0$，定義 g^{pq} 爲

$$g^{pq} = \frac{g_{pq}\text{ 的餘因式}}{g}$$

則 g^{pq} 爲一二秩對稱逆變張量，稱爲 g_{pq} 的共軛張量 (conjugate tensor) 或倒數張量 (reciprocal tensor) (見 8.34 題)。我們可以證明 (8.33 題)

$$g^{pq} g_{rq} = \delta^p_r$$

8-17 相伴張量

給定一張量，我們可以將它的指標升高或降低來導出其他張量。例如，給定張量 A_{pq}，我們將指標 p 升高可得張量 $A^{p}_{\cdot q}$，其中點代表被移動指標的原位置。將指標 q 升高可得到 $A^{pq}_{\cdot\cdot}$。在不會導致混淆時，我們可將點省略；因此 $A^{pq}_{\cdot\cdot}$ 可以寫成 A^{pq}。這

些導出的張量可以由所給之張量與計量張量 g_{pq} 或共軛張量 g^{pq} 的內積而得。例如，

$$A^{p}_{\cdot q} = g^{rp} A_{rq}, \quad A^{pq} = g^{rp} g^{sq} A_{rs}, \quad A^{p}_{\cdot rs} = g_{rq} A^{pq}_{\cdot\cdot s}$$

$$A^{qm\cdot tk}_{\cdot\cdot n} = g^{pk} g_{sn} g^{rm} A^{q\cdot st}_{\cdot r\cdot\cdot p}$$

如果我們將乘上 g^{rp} 解釋爲：無論後面跟的是什麼，令 $r=p$（或 $p=r$）並將指標升高。同理我們將乘上 g_{rq} 解釋爲：無論後面跟的是什麼，令 $r=q$（或 $q=r$）並將指標下降。則上列式子就十分淸楚了。

所有這些由所給張量與計量張量及共軛張量之內積所得到的張量稱爲所給張量的**相伴張量**(associated tensors)。例如A^m 與A_m 爲相伴張量，前者爲逆變分量，後者爲協變分量，兩者之間的關係爲

$$A_p = g_{pq} A^q \qquad \text{或} \qquad A^p = g^{pq} A_q$$

對直角座標系而言，若 $p=q$，則 $g_{pq}=1$，若 $p \neq q$，則 $g_{pq}=0$，所以 $A_p = A^p$，這也就說明了爲什麼在前幾章中，一個向量的逆變分量與協變分量並沒有差別。

8-18 向量的長度，向量間的夾角

A^p 與 B_p 的內積 A^pB_p 爲一純量，與直角座標系中的純量積類似。我們定義向量 A^p 或 A_p 的長度爲

$$L^2 = A^p A_p = g^{pq} A_p A_q = g_{pq} A^p A^q$$

而 A^p 與 B_p 之間的夾角 θ，我們可定義爲

$$\cos\theta = \frac{A^p B_p}{\sqrt{(A^p A_p)(B^p B_p)}}$$

8-19 自然分量

向量A_p 或A^p 的自然分量(physical component)，記作A_u，A_v 及A_w，爲此向量在座標曲線之切線上的投影，在直角座標時，這些分量分別爲

$$A_u = \sqrt{g_{11}}\, A^1 = \frac{A_1}{\sqrt{g_{11}}}, \quad A_v = \sqrt{g_{22}}\, A^2 = \frac{A_2}{\sqrt{g_{22}}}, \quad A_w = \sqrt{g_{33}}\, A^3 = \frac{A_3}{\sqrt{g_{33}}}$$

同理，一個張量A^{pq} 或A_{pq} 的自然分量爲

$$A_{uu} = g_{11}A^{11} = \frac{A_{11}}{g_{11}}, \quad A_{uv} = \sqrt{g_{11}g_{22}}\,A^{12} = \frac{A_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}, \quad A_{uw} = \sqrt{g_{11}g_{33}}\,A^{13} = \frac{A_{13}}{\sqrt{g_{11}g_{33}}}$$ ，等等

8·20 克雷斯托福記號

符號

$$[pq,r] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\right)$$

$$\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} = g^{sr}[pq,r]$$

分別稱爲**第一及第二類克雷斯托福記號**(Christoff symbols of the first and second kind)。其他也可以用 $\{pq,s\}$ 或 Γ^s_{pq} 來代替 $\{{s \atop pq}\}$。符號 Γ^s_{pq} 暗示了張量的一種特性，但是一般這並不是眞確的。

8·21 克雷斯托福記號的轉換定律

如果我們用一條横線代表座標系 $\bar{x}^k$ 中的一個符號，則

$$\overline{[jk,m]} = [pq,r]\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} + g_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}$$

$$\overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^q}\frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}$$

爲克雷斯托福記號的轉換定律，顯示除非右邊第二項爲 0 ，否則就不是張量。

8·22 測地線

在一里曼空間中，曲線 $x^r = x^r(t)$ 上兩點 t_1 與 t_2 之間的距離 s 爲

$$s = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{g_{pq}\frac{dx^p}{dt}\frac{dx^q}{dt}}\,dt$$

在此空間中，使得此距離爲最小的曲線稱爲此空間的一條**測地線**(geodesic)。利用**變分學**(calculus of variations)(見 8.50 及 8.51 題)，此測地線可由微分方程式

$$\frac{d^2x^r}{ds^2} + \begin{Bmatrix} r \\ pq \end{Bmatrix}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds} = 0$$

求出，其中 s 爲弧長參數。舉例來說，在一平面上的測地線爲直線，而在球面上的測地線爲大圓弧。

8-23 協變導數

一個張量 A_p 對於 x^q 的協變導數（covariant derivative）記作 $A_{p,q}$，定義爲

$$A_{p,q} = \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} A_s$$

爲一二秩協變張量。

張量 A^p 對於 x^q 的協變導數記作 $A^p_{,q}$，且定義爲

$$A^p_{,q} = \frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \begin{Bmatrix} p \\ qs \end{Bmatrix} A^s$$

爲一二秩混合張量。

對直角座標系而言，克雷斯托福記號等於零，且協變導數爲一般的偏導數。張量的協變導數亦爲張量（見 8.52 題）。

上面的結果可以推廣至更高秩張量的協變導數，因此

$$\begin{aligned} A^{p_1\cdots p_m}_{r_1\cdots r_n,q} = {} & \frac{\partial A^{p_1\cdots p_m}_{r_1\cdots r_n}}{\partial x^q} \\ & - \begin{Bmatrix} s \\ r_1 q \end{Bmatrix} A^{p_1\cdots p_m}_{s r_2\cdots r_n} - \begin{Bmatrix} s \\ r_2 q \end{Bmatrix} A^{p_1\cdots p_m}_{r_1 s r_3\cdots r_n} - \cdots - \begin{Bmatrix} s \\ r_n q \end{Bmatrix} A^{p_1\cdots p_m}_{r_1\cdots r_{n-1} s} \\ & + \begin{Bmatrix} p_1 \\ qs \end{Bmatrix} A^{s p_2\cdots p_m}_{r_1\cdots r_n} + \begin{Bmatrix} p_2 \\ qs \end{Bmatrix} A^{p_1 s p_3\cdots p_m}_{r_1\cdots r_n} + \cdots + \begin{Bmatrix} p_m \\ qs \end{Bmatrix} A^{p_1\cdots p_{m-1} s}_{r_1\cdots r_n} \end{aligned}$$

爲 $A^{p_1\cdots p_m}_{r_1\cdots r_n}$ 對 x^q 的協變導數。

張量之乘積與和的協變微分法則與一般的微分法則相同。在演算微分時，由於張量 g_{pq}，g^{pq} 及 δ^p_q 的協變導數是零（見 8.54 題），所以可以把它們視爲常數。由於協變導數表示一個物理量的變率而與任一座標系無關，所以它們在表示物理定律時非常重要。

8-24 排列符號與排列張量

若用

r 中有兩個以上相等

來定義 e_{pqr}，並用同樣的方式來定義 e^{pqr}。則符號 e_{pqr} 及 e^{pqr} 稱爲三維空間中的排列符號(permutation symbol)。

另外，我們定義

$$\epsilon_{pqr} = \frac{1}{\sqrt{g}} e_{pqr}, \qquad \epsilon^{pqr} = \sqrt{g}\, e^{pqr}$$

我們可以證明 ϵ_{pqr} 與 ϵ^{pqr} 分別爲協變及逆變張量，我們稱爲三維空間中的排列張量(permutation tensor)。這些都可以推廣至更高維的空間。

8-25 梯度、散度及旋度的張量形

1. **梯度** 若 Φ 爲一純量或不變量，則 Φ 的梯度定義爲

$$\nabla\Phi = \text{grad}\,\Phi = \Phi_{,p} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^p}$$

其中 $\Phi_{,p}$ 爲 Φ 對於 x^p 的協變導數。

2. **散度** A^p 的散度爲其對於 x^q 之協變導數的收縮，即 $A^p_{,q}$ 的收縮。則

$$\text{div}\,A^p = A^p_{,p} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\,A^k)$$

3. **旋度** A_p 的旋度爲 $A_{p,q} - A_{q,p} = \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \frac{\partial A_q}{\partial x^p}$，是一個二秩張量。旋度亦可定義爲 $-\epsilon^{pqr} A_{p,q}$。

4. **拉卜拉士運算** Φ 的拉卜拉士運算爲 grad Φ 的散度或

$$\nabla^2\Phi = \text{div}\,\Phi_{,p} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{g}\, g^{jk} \frac{\partial\Phi}{\partial x^k}\right)$$

如果 $g<0$，則必須用 $\sqrt{-g}$ 來取代 $\sqrt{g}$。$g>0$ 與 $g<0$ 兩種情況，都可用 $\sqrt{|g|}$ 代替 $\sqrt{g}$。

8-26 本性或絕對導數

A_p 沿著曲線 $x^q = x^q(t)$ 的**本性導數**(intrinsic derivative)或**絕對導數**(absolute derivative)記作 $\frac{\delta A_p}{\delta t}$，其定義爲 A_p 的協變導數與 $\frac{dx^q}{dt}$ 的內積，也就是 $A_{p,q}\frac{dx^q}{dt}$，亦即

$$\frac{\delta A_p}{\delta t} = \frac{dA_p}{dt} - \left\{ {r \atop p\,q} \right\} A_r \frac{dx^q}{dt}$$

同理，我們定義

$$\frac{\delta A^p}{\delta t} = \frac{dA^p}{dt} + \left\{ {p \atop q\,r} \right\} A^r \frac{dx^q}{dt}$$

如果向量A_p或A^p沿一曲線的本性導數皆爲 0 ，則我們稱此向量沿此曲線**平行移動**(move parallelly)。

對更高秩張量的本性導數也是用同樣的方法來定義。

8-27 相對與絕對張量

如果一個張量 $A^{p_1\cdots p_m}_{r_1\cdots r_n}$ 的分量依據方程式

$$\bar{A}^{q_1\cdots q_m}_{s_1\cdots s_n} = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^w A^{p_1\cdots p_m}_{r_1\cdots r_n} \frac{\partial \bar{x}^{q_1}}{\partial x^{p_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{q_m}}{\partial x^{p_m}} \frac{\partial x^{r_1}}{\partial \bar{x}^{s_1}} \cdots \frac{\partial x^{r_n}}{\partial \bar{x}^{s_n}}$$

轉換，其中 $J = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|$ 爲此轉換的亞可比行列式，則我們稱此張量爲一**權數w的相對張量**(relative tensor of weight w)。若$w=0$，則稱此張量爲**絕對張量**(absolute tensor)，我們在前面所討論的張量都是這一類型。若$w=1$，則此相對張量稱爲**張量密度**(tensor density)。相對張量的加法、乘法、……等運算，都與絕對張量的運算類似，請參考8.64 題之例子。

習題與解答

求和慣例

8.1 用求和慣例將下列各式重寫。

答 (a) $d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \phi}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial x^N} dx^N$. $\qquad d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^j} dx^j$

(b) $\frac{d\bar{x}^k}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^1}\frac{dx^1}{dt} + \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^2}\frac{dx^2}{dt} + \dots + \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^N}\frac{dx^N}{dt}$. $\qquad \frac{d\bar{x}^k}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m}\frac{dx^m}{dt}$

(c) $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + \dots + (x^N)^2$. $\qquad x^k x^k$

(d) $ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2$. $\qquad ds^2 = g_{kk}\, dx^k dx^k$, $N=3$

(e) $\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g_{pq}\, dx^p dx^q$. $\qquad g_{pq}\, dx^p dx^q$, $N=3$

8.2 寫出下列各和之項。

答 (a) $a_{jk}x^k$.
$$\sum_{k=1}^{N} a_{jk}x^k = a_{j1}x^1 + a_{j2}x^2 + \dots + a_{jN}x^N$$

(b) $A_{pq}A^{qr}$.
$$\sum_{q=1}^{N} A_{pq}A^{qr} = A_{p1}A^{1r} + A_{p2}A^{2r} + \dots + A_{pN}A^{Nr}$$

(c) $\bar{g}_{rs} = g_{jk}\dfrac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^r}\dfrac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^s}$, $N=3$.

$$\bar{g}_{rs} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} g_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^s}$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\left(g_{j1}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^s} + g_{j2}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^s} + g_{j3}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^s}\right)$$

$$= g_{11}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^s} + g_{21}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^s} + g_{31}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^s}$$
$$+ g_{12}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^s} + g_{22}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^s} + g_{32}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^s}$$
$$+ g_{13}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^s} + g_{23}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^s} + g_{33}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^s}$$

8.3 若 x^k ，$k=1,2,\cdots,N$ 爲直角座標，則下列各方程式在 $N=2$，3 及 $N\geq 4$ 所代表的軌跡爲何？在必要時，假設函數爲單値函數，且有連續導數並互相獨立。

答 (a) $a_kx^k=1$，其中 a_k 爲常數。

當 $N=2$，$a_1x^1+a_2x^2=1$ 是二維空間中的一直線，即平面中的一直線。

當 $N=3$，$a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3=1$ 是三維空間中的一個平面。

當 $N\geq 4$，$a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_Nx^N=1$ 爲一超平面(hyperplane)。

(b) $x^kx^k=1$。

當 $N=2$，$(x^1)^2+(x^2)^2=1$ 爲平面中的一個單位圓。

當 $N=3$，$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=1$ 爲一單位半徑球。

當 $N\geq 4$，$(x^1)^2+(x^2)^2+\cdots+(x^N)^2=1$，爲一單位半徑的超球面(hypersphere)。

(c) $x^k=x^k(u)$。

當 $N=2$，$x^1=x^1(u)$，$x^2=x^2(u)$，爲一以 u 爲參數的平面曲線。

當 $N=3$，$x^1=x^1(u)$，$x^2=x^2(u)$，$x^3=x^3(u)$，爲一三維空間曲線。

當 $N\geq 4$，爲一 N 維空間曲線。

(d) $x^k=x^k(u,v)$

當$N=2$，$x^1=x^1(u,v)$，$x^2=x^2(u,v)$，爲一由(u,v)至(x^1,x^2)的座標變換。

當$N=3$，$x^1=x^1(u,v)$，$x^2=x^2(u,v)$，$x^3=x^3(u,v)$爲一以u及v爲參數的三維曲面。

當$N\geq 4$，爲一超曲面(hypersurface)。

逆變、協變向量與張量

8.4 對張量(a) A^i_{jk}，(b) B^{mn}_{ijk}，(c) C^m 寫出其變換定律。

解 (a)

$$\bar{A}^p_{qr} = \frac{\partial\bar{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^q}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^r}A^i_{jk}$$

為了幫助我們記憶這個變換式，注意指標p，q，r在左式的相對位置與在右式中相同。由於這些指標均與$\bar{x}$座標相關，並且指標i，j，k分別與指標p，q，r相關，所以所需之變換式很容易就可以寫出。

(b) $$\bar{B}^{pq}_{rst} = \frac{\partial\bar{x}^p}{\partial x^m}\frac{\partial\bar{x}^q}{\partial x^n}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^s}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^t}B^{mn}_{ijk}$$

(c) $$\bar{C}^p = \frac{\partial\bar{x}^p}{\partial x^m}C^m$$

8.5 量$A(j,k,l,m)$爲座標x^i的一個函數，其依法則

$$\bar{A}(p,q,r,s) = \frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^p}\frac{\partial\bar{x}^q}{\partial x^k}\frac{\partial\bar{x}^r}{\partial x^l}\frac{\partial\bar{x}^s}{\partial x^m}A(j,k,l,m)$$

轉換至另一座標系$\bar{x}^i$。

(a)此量是否爲一張量？(b)若是，用適合的符號寫出此張量，並(c)求出其逆變及協變的階數及張量的秩數。

解 (a)是一張量，(b) A^{klm}_j，(c)逆變爲3階，協變爲1階，總共是$3+1=4$秩。

8.6 決定下列量是否爲張量。若是，說明其爲逆變或協變，並求出秩數。

(a) dx^k，(b) $\dfrac{\partial\phi(x^1,\ldots,x^N)}{\partial x^k}$

解 (a) 假設座標變換式爲$\bar{x}^j=\bar{x}^j(x^1,x^2,\cdots,x^N)$。則$d\bar{x}^j=\dfrac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^k}dx^k$，因此$dx^k$爲一1秩逆變張量或一逆變向量。注意指標$k$的位置是適當的。

(b) 在變換$x^k=x^k(\bar{x}^1,\cdots,\bar{x}^N)$下，$\phi$是一個$x^k$的函數，因此$\bar{x}^j$使得$\phi(x^1,\cdots,x^N)\equiv\bar{\phi}(\bar{x}^1,\cdots,\bar{x}^N)$，即$\phi$是一個純量或不變量（零秩張量）。由偏微分的鏈鎖法則，$\dfrac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{x}^j}=\dfrac{\partial\phi}{\partial\bar{x}^j}=\dfrac{\partial\phi}{\partial x^k}\dfrac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^j}=\dfrac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^j}\dfrac{\partial\phi}{\partial x^k}$，因此

$\dfrac{\partial\phi}{\partial x^k}$ 的轉換與 $\bar{A}_j=\dfrac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}A_k$ 相似。則 $\dfrac{\partial\phi}{\partial x^k}$ 爲一 1 秩協變張量或一協變向量。

注意在 $\dfrac{\partial\phi}{\partial x^k}$ 中，指標出現在分母，因此作用像一個下標，顯示其具有協變的特性。我們將張量 $\dfrac{\partial\phi}{\partial x^k}$ 或其等價的以 $\dfrac{\partial\phi}{\partial x^k}$ 爲分量的張量，通常寧願寫成 grad ϕ 或 $\nabla\phi$ 。

8.7 若一協變張量在直角座標中的分量爲 xy ，$2y-z^2$ ，xz 。求其在球面座標中的協變分量。

圖 令 A_j 代表在直角座標 $x^1=x$ ，$x^2=y$ ，$x^3=z$ 中的協變分量，則

$$A_1=xy=x^1x^2,\qquad A_2=2y-z^2=2x^2-(x^3)^2,\qquad A_3=x^1x^3$$

在此我們必須將上標與指數分辨清楚。

令 $\bar{A}_k$ 代表在球面座標 $\bar{x}^1=r$ ，$\bar{x}^2=\theta$ ，$\bar{x}^3=\phi$ 中的協變分量，則

$$\bar{A}_k=\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k}A_j \tag{1}$$

此二座標系間的變換關係式爲

$$x^1=\bar{x}^1\sin\bar{x}^2\cos\bar{x}^3,\qquad x^2=\bar{x}^1\sin\bar{x}^2\sin\bar{x}^3,\qquad x^3=\bar{x}^1\cos\bar{x}^2$$

則由(1)式可得出所需之協變分量

$$\begin{aligned}\bar{A}_1 &= \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1}A_1+\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1}A_2+\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1}A_3\\
&= (\sin\bar{x}^2\cos\bar{x}^3)(x^1x^2)+(\sin\bar{x}^2\sin\bar{x}^3)(2x^2-(x^3)^2)+(\cos\bar{x}^2)(x^1x^3)\\
&= (\sin\theta\cos\phi)(r^2\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi)\\
&\quad +(\sin\theta\sin\phi)(2r\sin\theta\sin\phi-r^2\cos^2\theta)\\
&\quad +(\cos\theta)(r^2\sin\theta\cos\theta\cos\phi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{A}_2 &= \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2}A_1+\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2}A_2+\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2}A_3\\
&= (r\cos\theta\cos\phi)(r^2\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi)\\
&\quad +(r\cos\theta\sin\phi)(2r\sin\theta\sin\phi-r^2\cos^2\theta)\\
&\quad +(-r\sin\theta)(r^2\sin\theta\cos\theta\cos\phi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{A}_3 &= \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3}A_1+\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3}A_2+\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3}A_3\\
&= (-r\sin\theta\sin\phi)(r^2\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi)\\
&\quad +(r\sin\theta\cos\phi)(2r\sin\theta\sin\phi-r^2\cos^2\theta)\\
&\quad +(0)(r^2\sin\theta\cos\theta\cos\phi)\end{aligned}$$

8.8 證明雖然 A_p 爲一秩協變張量，但 $\dfrac{\partial A_p}{\partial x^q}$ 不是一個張量。

解 由假設，$\bar{A}_j=\dfrac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}A_p$，將其對 $\bar{x}^k$ 微分，

$$\frac{\partial \bar{A}_j}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial A_p}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^j}A_p$$

$$= \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial A_p}{\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^j}A_p$$

$$= \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial A_p}{\partial x^q} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^j}A_p$$

由於右式中第二項存在，所以 $\dfrac{\partial A_p}{\partial x^q}$ 不像一個張量的變換。稍後我們將顯示如何在 $\dfrac{\partial A_p}{\partial x^q}$ 中加上一個量，使其結果成爲一個張量（8.52 題）。

8.9 證明一流體在任一點的速度爲一秩逆變張量。

解 一流體在任一點的速度在座標系 x^k 的分量爲 $\dfrac{dx^k}{dt}$。在座標系 $\bar{x}^j$ 的速度爲 $\dfrac{d\bar{x}^j}{dt}$。但是由鏈鎖法則，

$$\frac{d\bar{x}^j}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt}$$

由此可知此速度爲一秩逆變張量或逆變向量。

克郎乃克 δ

8.10 計算 (a) $\delta_q^p A_s^{qr}$，(b) $\delta_q^p \delta_r^q$.

解 由於 $\delta_q^p=\begin{cases}1，若\ p=q\\0，若\ p\neq q\end{cases}$，所以

(a) $\delta_q^p A_s^{qr} = A_s^{pr}$，　　(b) $\delta_q^p \delta_r^q = \delta_r^p$

8.11 證明 $\dfrac{\partial x^p}{\partial x^q} = \delta_q^p$.

解 若 $p=q$，由於 $x^p=x^q$，所以 $\dfrac{\partial x^p}{\partial x^q}=1$。

若 $p\neq q$，由於 x^p 與 x^q 獨立，所以 $\dfrac{\partial x^p}{\partial x^q}=0$。

因此

$$\frac{\partial x^p}{\partial x^q} = \delta^p_q.$$

8.12 證明 $\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^q}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^r} = \delta^p_r$.

解 座標 x^p 爲座標 $\bar{x}^q$ 的函數，所以也是座標 x^r 的函數，則由鏈鎖法則及 8.11 題可得

$$\frac{\partial x^p}{\partial x^r} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^q}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^r} = \delta^p_r$$

8.13 若 $\bar{A}^p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q}A^q$，證明 $A^q = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p}\bar{A}^p$。

解 用 $\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p}$ 乘上，

$$\bar{A}^p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q}A^q$$

則由 8．12 題可得 $\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p}\bar{A}^p = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q}A^q = \delta^r_q A^q = A^r$。取 $r = q$ 則可得所需結果。這表示在張量分量的變換方程式中，有橫線的量可以和無橫線的量交換，這個結果可證明其可一般化。

8.14 證明 δ^p_q 爲一二秩混合張量。

解 若 δ^p_q 爲二秩混合張量，則其必須遵守變換法則

$$\bar{\delta}^j_k = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\delta^p_q$$

由 8．12 題可知此式的右邊等於 $\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^k} = \delta^j_k$。由於當 $j = k$ 時，$\bar{\delta}^j_k = \delta^j_k = 1$，當 $j \neq k$ 時，$\bar{\delta}^j_k = \delta^j_k = 0$，所以 δ^p_q 是一個二秩混合張量。

注意我們有時候用 δ_{pq} 來代表克郎乃克 δ。雖然這個符號看起來像一個二秩協變張量，但實際上並不是。

張量的基本運算

8.15 若 A^{pq}_r 及 B^{pq}_r 均爲張量，證明它們的和及差亦爲張量。

解 由假設 A^{pq}_r，B^{pq}_r 均爲張量，所以

$$\bar{A}_l^{jk} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}A_r^{pq}$$

$$\bar{B}_l^{jk} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}B_r^{pq}$$

相加，

$$(\bar{A}_l^{jk} + \bar{B}_l^{jk}) = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}(A_r^{pq} + B_r^{pq})$$

相減，

$$(\bar{A}_l^{jk} - \bar{B}_l^{jk}) = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}(A_r^{pq} - B_r^{pq})$$

則 $A_r^{pq} + B_r^{pq}$ 與 $A_r^{pq} - B_r^{pq}$ 均爲與 A_r^{pq} 及 B_r^{pq} 同秩同型的張量。

8.16 若 A_r^{pq} 及 B_t^s 爲張量，證明 $C_{rt}^{pqs} = A_r^{pq} B_t^s$ 亦爲一張量。

解 我們必須證明分量由張量 A_r^{pq} 及 B_t^s 之分量相乘而得的 C_{rt}^{pqs} 爲一張量。因爲 A_r^{pq} 及 B_t^s 爲張量，所以

$$\bar{A}_l^{jk} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}A_r^{pq}$$

$$\bar{B}_n^m = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^n}B_t^s$$

相乘得

$$\bar{A}_l^{jk}\bar{B}_n^m = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^n}A_r^{pq}B_t^s$$

由此顯示 $A_r^{pq}\ B_t^s$ 是一個 5 秩張量，其中 p，q，s 爲逆變指標，r，t 爲協變指標，因此可記作 C_{rt}^{pqs}。我們稱 $C_{rt}^{pqs} = A_r^{pq} B_t^s$ 爲 A_r^{pq} 與 B_t^s 的外積(outer product)。

8.17 令 A_{rst}^{pq} 爲一張量。(a) 選取 $p = t$，並證明 A_{rsp}^{pq} 爲一張量，其秩數爲何？(b) 選取 $p = t$ 及 $q = s$，並同樣的證明 A_{rqp}^{pq} 爲一張量，其秩數爲何？

解 (a) 由於 A_{rst}^{pq} 爲一張量，所以

$$(1) \qquad \bar{A}_{lmn}^{jk} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^n}A_{rst}^{pq}$$

我們必須證明 A_{rsp}^{pq} 爲一張量。將對應的指標 j 及 n 取相等，並在此指標取和，則

$$\bar{A}^{jk}_{lmj} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j}A^{pq}_{rst}$$

$$= \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^m}A^{pq}_{rst}$$

$$= \delta^t_p \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^m}A^{pq}_{rst}$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^m}A^{pq}_{rsp}$$

所以A^{pq}_{rsp} 爲一 3 秩張量，我們可記作B^q_{rs}。這種將一個張量的一個逆變指標與一個協變指標取作相等並求和的過程稱爲收縮（contraction）。經由此過程產生的張量，其秩數較原來的張量少 2 。

(b) 我們必須證明A^{pq}_{rqp} 爲一張量，在(a)之(1)式中取 $j=n$ 及 $k=m$，並在 j 與 k 上求和，可得

$$\bar{A}^{jk}_{lkj} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j}A^{pq}_{rst}$$

$$= \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}A^{pq}_{rst}$$

$$= \delta^t_p \delta^s_q \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}A^{pq}_{rst}$$

$$= \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}A^{pq}_{rqp}$$

由此證得A^{pq}_{rqp} 爲一 1 秩張量，可記作C_r。注意在收縮兩次後，秩數減少 4 。

8.18 證明張量A^p_q 收縮後爲一純量或不變量。

解 我們有

$$\bar{A}^j_k = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}A^p_q$$

取 $j=k$ 並加總，

$$\bar{A}^j_j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}A^p_q = \delta^q_p A^p_q = A^p_p$$

則$\bar{A}^j_j = A^p_p$，因此可知A^p_p 必爲一不變量。由於A^p_q 爲一 2 秩張量，它收縮後後的秩數應較其原秩數少 2，所以我們定義一個不變量爲一零秩張量。

8.19 證明張量A^p 與B_q 之外積的收縮爲一不變量。

解 由於 A^p 及 B_q 爲張量，所以 $\bar{A}^j = \dfrac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} A^p$，$\bar{B}_k = \dfrac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} B_q$，則

$$\bar{A}^j \bar{B}_k = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} A^p B_q$$

收縮後（取 $j=k$ 並求和）

$$\bar{A}^j \bar{B}_j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} A^p B_q = \delta^q_p A^p B_q = A^p B_p$$

所以 $A^p B_p$ 爲一不變量。這種將兩張量外乘然後再收縮的過程稱爲**內乘法**（inner multiplication），其結果稱爲**內積**（inner product）。由於 $A^p B_p$ 爲一純量，所以它也稱爲向量 A^p 與 B_q 的**純量積**（scalar product）。

8.20 證明張量 A^p_r 與 B^{qs}_t 的任何內積均爲一 3 秩張量。

解 A^p_r 與 B^{qs}_t 的外積 $= A^p_r B^{qs}_t$。

我們對 p 及 t 收縮，即令 $p=t$ 並求和。我們必須證明其結果 $A^p_r B^{qs}_p$ 爲一 3 秩張量。

由假設，A^p_r 及 B^{qs}_t 爲張量，則

$$\bar{A}^j_k = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} A^p_r, \qquad \bar{B}^{lm}_n = \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^n} B^{qs}_t$$

相乘，令 $j=n$ 並求和，我們可得

$$\begin{aligned}
\bar{A}^j_k \bar{B}^{lm}_j &= \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j} A^p_r B^{qs}_t \\
&= \delta^t_p \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s} A^p_r B^{qs}_t \\
&= \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s} A^p_r B^{qs}_p
\end{aligned}$$

由此顯示 $A^p_r B^{qs}_p$ 爲一 3 秩張量。在乘積 $A^p_r B^{qs}_t$ 中，對 q 及 r 或對 s 及 r 做收縮，利用類似的方法亦可證明其結果爲一 3 秩張量。

另解 兩個張量的外積亦爲一張量，其秩數爲原來二張量的秩數和。所以 $A^p_r B^{qs}_t$ 的秩數爲 $2+3=5$。由於一張量收縮的結果，其秩數會減 2，所以 $A^p_r B^{qs}_t$ 的任一收縮均爲秩數 $5-2=3$ 的張量。

8.21 若 $X(p,q,r)$ 爲一量，使得對任一張量 B^{qn}_r，均有 $X(p,q,r)B^{qn}_r=0$，證明 $X(p,q,r)$ 恆等於 0。

解 由於 B^{qn}_r 爲一任意張量，所以我們可選一個特定的分量不等於 0（例如在 q

$=2$，$r=3$ 時為 1），而其它的分量均為 0。則 $X(p,2,3)B_3^{2n}=0$，由於 $B_3^{2n}\neq 0$，所以 $X(p,2,3)=0$。對 q 與 r 的其它所有組合，基於同樣的理由，我們可證得 $X(p,q,r)=0$，因此得證。

8.22 若 B_r^{qs} 為任意張量，C_p^s 為一張量，一量 $A(p,q,r)$ 使得在座標系 x^i 中，$A(p,q,r)B_r^{qs}=C_p^s$。證明 $A(p,q,r)$ 為一張量。

解 在轉換座標 $\bar{x}^i$ 中，$\bar{A}(j,k,l)\,\bar{B}_l^{km}=\bar{C}_j^m$。則

$$\bar{A}(j,k,l)\,\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}B_r^{qs} \;=\; \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}C_p^s \;=\; \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}A(p,q,r)\,B_r^{qs}$$

或

$$\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s}\left[\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\bar{A}(j,k,l) - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}A(p,q,r)\right]B_r^{qs} = 0$$

與 $\dfrac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^m}$ 做內積（即乘上 $\dfrac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^t}$，再取 $t=m$ 收縮）得

$$\delta_s^n\left[\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\bar{A}(j,k,l) - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}A(p,q,r)\right]B_r^{qs} = 0$$

或

$$\left[\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\bar{A}(j,k,l) - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}A(p,q,r)\right]B_r^{qn} = 0.$$

因為 B_r^{qn} 為任意張量，所以由 8.21 題可得

$$\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\bar{A}(j,k,l) - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}A(p,q,r) = 0$$

與 $\dfrac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^m}\dfrac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^r}$ 做內積可得

$$\delta_m^k\,\delta_l^n\,\bar{A}(j,k,l) - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^r}A(p,q,r) = 0$$

或

$$\bar{A}(j,m,n) = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^r}A(p,q,r)$$

由此顯示 $A(p,q,r)$ 為一張量，且為 A_{pq}^r。

在此題中我們建立了商律（quotient law）的一個特例，此商律[illegible]若[illegible]量 X 與一任意張量 B 的內積[illegible]為[illegible]，則 X 為一張量。

對稱及反對稱張量

8.23 若一張量 A^{pqr}_{st} 在某一座標系中，對指標 p 及 q 爲對稱（或反對稱），證明其在任一座標系中，對指標 p 及 q 仍爲對稱（或反對稱）。

解 由於只討論到指標 p 及 q，我們可以對 B^{pq} 來證明。

若 B^{pq} 爲對稱，$B^{pq}=B^{qp}$，則

$$\bar{B}^{jk} = \frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^q}B^{pq} = \frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^p}B^{qp} = \bar{B}^{kj}$$

因此在 $\bar{x}^i$ 座標系中，B_{pq} 保持對稱。

若 B^{pq} 爲反對稱，$B^{pq}=-B^{qp}$，則

$$\bar{B}^{jk} = \frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^q}B^{pq} = -\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^p}B^{qp} = -\bar{B}^{kj}$$

因此在 $\bar{x}^i$ 座標系中，B_{pq} 保持反對稱。

上面的結果當然對其它的對稱（或反對稱）張量成立。

8.24 證明每一個張量都可以表示成兩個張量的和，而此二張量對某兩個協變或逆變指標，一個爲對稱，而另一個爲反對稱。

解 例如，考慮張量 B^{pq}，我們有

$$B^{pq} = \tfrac{1}{2}(B^{pq}+B^{qp}) + \tfrac{1}{2}(B^{pq}-B^{qp})$$

其中 $R^{pq}=\frac{1}{2}(B^{pq}+B^{qp})=R^{qp}$ 爲對稱，而 $S^{pq}=\frac{1}{2}(B^{pq}-B^{qp})=-S^{qp}$ 爲反對稱。

同理，對任一張量此結果均成立。

8.25 若 $\Phi=a_{jk}A^jA^k$，證明我們一定可以寫成 $\Phi=b_{jk}A^jA^k$，其中 b_{jk} 爲對稱。

解
$$\Phi = a_{jk}A^jA^k = a_{kj}A^kA^j = a_{kj}A^jA^k$$

則

$$2\Phi = a_{jk}A^jA^k + a_{kj}A^jA^k = (a_{jk}+a_{kj})A^jA^k$$

且

$$\Phi = \tfrac{1}{2}(a_{jk}+a_{kj})A^jA^k = b_{jk}A^jA^k$$

其中 $b_{jk}=\frac{1}{2}(a_{jk}+a_{kj})=b_{kj}$ 爲對稱。

矩 陣

8.26 寫出矩陣

$$A=\begin{pmatrix}3&1&-2\\4&-2&3\\-2&1&-1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-4&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

的和 $S=A+B$，差 $D=A-B$，及積 $P=AB$，$Q=BA$。

解

$$S=A+B=\begin{pmatrix}3+2&1+0&-2-1\\4-4&-2+1&3+2\\-2+1&1-1&-1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1&-3\\0&-1&5\\-1&0&-1\end{pmatrix}$$

$$D=A-B=\begin{pmatrix}3-2&1-0&-2+1\\4+4&-2-1&3-2\\-2-1&1+1&-1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\8&-3&1\\-3&2&-1\end{pmatrix}$$

$$P=AB=\begin{pmatrix}(3)(2)+(1)(-4)+(-2)(1)&(3)(0)+(1)(1)+(-2)(-1)&(3)(-1)+(1)(2)+(-2)(0)\\(4)(2)+(-2)(-4)+(3)(1)&(4)(0)+(-2)(1)+(3)(-1)&(4)(-1)+(-2)(2)+(3)(0)\\(-2)(2)+(1)(-4)+(-1)(1)&(-2)(0)+(1)(1)+(-1)(-1)&(-2)(-1)+(1)(2)+(-1)(0)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&3&-1\\19&-5&-8\\-9&2&4\end{pmatrix}$$

$$Q=BA=\begin{pmatrix}8&1&-3\\-12&-4&9\\-1&3&-5\end{pmatrix}$$

由此顯示 $AB\neq BA$，即矩陣的乘法一般不可交換。

8.27 若 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1&2\\3&-2\end{pmatrix}$，證明 $(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$.

解

$A+B=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix}3&-1\\-4&5\end{pmatrix}$. 則 $(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&14\\2&3\end{pmatrix}$.

$A^2=\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5\\-5&8\end{pmatrix}$, $B^2=\begin{pmatrix}-1&2\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-6\\-9&10\end{pmatrix}$.

則

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}-4&11\\4&-2\end{pmatrix}.$$

所以，$(A+B)(A-B) \neq A^2-B^2$。然而，$(A+B)(A-B) = A^2-AB+BA-B^2$。

8.28 用矩陣符號表示(a)一協變向量，(b)一 2 秩逆變張量的變換方程式，假設$N=3$。

解 (a) 變換方程式 $\bar{A}_p = \dfrac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p} A_q$ 可用行向量寫成

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

或用列向量寫成

$$(\bar{A}_1 \ \bar{A}_2 \ \bar{A}_3) = (A_1 \ A_2 \ A_3) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \dfrac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \dfrac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} \\ \dfrac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} \end{pmatrix}$$

(b) 變換方程式 $\bar{A}^{pr} = \dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} \dfrac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s} A^{qs}$ 可寫成

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^{11} & \bar{A}^{12} & \bar{A}^{13} \\ \bar{A}^{21} & \bar{A}^{22} & \bar{A}^{23} \\ \bar{A}^{31} & \bar{A}^{32} & \bar{A}^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} \\ \dfrac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} & \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} & \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} \end{pmatrix}$$

這些結果可推廣至$N>3$時，但是對高秩張量，矩陣符號無法表示。

線素及計量張量

8.29 若$ds^2 = g_{jk}\,dx^j dx^k$爲一不變量，證明g_{jk}爲一對稱 2 秩協變張量。

解 由8.25題，$\Phi = ds^2$，$A^j = dx^j$，$A^k = dx^k$；因此g_{jk} 可選爲對稱。同時由於ds^2爲一不變量，所以

$$\bar{g}_{pq}\,d\bar{x}^p\,d\bar{x}^q = g_{jk}\,dx^j\,dx^k = g_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^p}d\bar{x}^p\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^q}d\bar{x}^q = g_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^p}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^q}d\bar{x}^p\,d\bar{x}^q$$

則 $\bar{g}_{pq} = g_{jk}\dfrac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^p}\dfrac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^q}$，而 g_{jk} 爲一對稱 2 秩協變張量，稱爲計量張量（metric tensor）。

8.30 決定(a)柱面座標，(b)球面座標中的計量張量。

解 (a) 由 7.7 題，$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2$。

若 $x^1 = \rho$，$x^2 = \phi$，$x^3 = z$ 則

$$g_{11} = 1,\ g_{22} = \rho^2,\ g_{33} = 1,\ g_{12} = g_{21} = 0,\ g_{23} = g_{32} = 0,\ g_{31} = g_{13} = 0.$$

用矩陣型式，此計量張量可寫成

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) 由 7.8(a)題，$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2$。

若 $x^1 = r$，$x^2 = \theta$，$x^3 = \phi$ 此計量張量可寫成

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

在一般正交座標系中，當 $j \neq k$，$g_{jk} = 0$。

8.31 用第二列元素及其對應的餘因式表示行列式 $g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$。(b)證明 $g_{jk}G(j,k) = g$，其中 $G(j,k)$ 爲 g_{jk} 在 g 中的餘因式，且僅對 k 求和。

解 (a) g_{jk} 的餘因式是經由(1)消去包含 g_{jk} 的行與列，(2)將所得之行列式乘上 $(-1)^{j+k}$ 而得。因此

$$g_{21}\text{ 的餘因式} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}, \qquad g_{22}\text{ 的餘因式} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{31} & g_{33} \end{vmatrix},$$

$$g_{23}\text{ 的餘因式} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{31} & g_{32} \end{vmatrix}$$

將這些餘因式分別記作$G(2,1)$，$G(2,2)$及$G(2,3)$，則由行列式基本定理可得

$$g_{21}G(2,1)+g_{22}G(2,2)+g_{23}G(2,3)=g$$

(b) 將(a)的結果應用至任一行或任一列，我們有$g_{jk}G(j,k)=g$，其中只對k取和。這些結果對N階行列式$g=|g_{jk}|$均成立。

8.32 (a) 證明 $g_{21}G(3,1)+g_{22}G(3,2)+g_{23}G(3,3)=0$.

(b) 證明若$j\neq p$，$g_{jk}G(p,k)=0$。

解 (a) 行列式 $\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \end{vmatrix}=0$，因爲其最後二列相等。依據此行列式最後一列元素展開可得

$$g_{21}G(3,1)+g_{22}G(3,2)+g_{23}G(3,3)=0$$

(b) 同(a)，令行列式中任二列（或行）對應的元素相等，則可證得若$j\neq p$，$g_{jk}G(p,k)=0$。此結果可推廣至N階行列式。

8.33 定義$g^{jk}=\dfrac{G(j,k)}{g}$，其中$G(j,k)$爲行列式$g=|g_{jk}|\neq 0$中元素g_{jk}的餘因式。證明$g_{jk}g^{pk}=\delta_j^p$。

解 由8.31題，$g_{jk}\dfrac{G(j,k)}{g}=1$或$g_{jk}g^{jk}=1$，其中僅對$k$求和。

由8.32題，若$p\neq j$則$g_{jk}\dfrac{G(p,k)}{g}=0$或$g_{jk}g^{pk}=0$。

所以$g_{jk}g^{pk}=\delta_j^p$。

在此我們使用了符號g^{jk}，雖然我們還沒有證明它是一個2秩逆變張量，在8.34題我們將證明此點。注意餘因式我們寫成$G(j,k)$而不使用G^{jk}，因爲我們可以證明，在一般意義中它並不是一個張量。但是它可以被證明是權數2的相對逆變張量，經由這種張量觀念的推廣，我們可以接受符號G^{jk}（見補充題8.152題）。

8.34 證明g^{jk}爲一對稱2秩逆變張量。

解 由於g_{jk}爲對稱，所以$G(j,k)$爲對稱，且$g^{jk}=G(j,k)/g$爲對稱。

若B^p爲一任意逆變向量，$B_q=g_{pq}B^p$爲一任意協變向量。乘上g^{jq}得

$$g^{jq}B_q=g^{jq}g_{pq}B^p=\delta_p^jB^p=B^j \quad 或 \quad g^{jq}B_q=B^j$$

由於B_q爲一任意向量，所以由商律得知g^{jq}爲2秩逆變張量。此張量g^{jk}稱

爲共軛計量張量（conjugate metric tensor）。

8.35　決定(a)柱面座標，(b)球面座標中的共軛計量張量。

解　(a)　由 8.30(a)題，$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho^2$

$$g^{11} = \frac{g_{11}\text{ 的餘因式}}{g} = \frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$g^{22} = \frac{g_{22}\text{ 的餘因式}}{g} = \frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho^2}$$

$$g^{33} = \frac{g_{33}\text{ 的餘因式}}{g} = \frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{vmatrix} = 1$$

$$g^{12} = \frac{g_{12}\text{ 的餘因式}}{g} = -\frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

同理，若 $j \neq k$，$g^{jk} = 0$。此共軛計量張量可用矩陣表示成

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)　由 8.30(b)題，$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{vmatrix} = r^4\sin^2\theta$

同(a)的作法，我們可求出 $g^{11} = 1$，$g^{22} = \frac{1}{r^2}$，$g^{33} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}$ 且當 $j \neq k$ 時，$g^{jk} = 0$。而共軛計量張量可寫成

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

8.36　對應於 $ds^2 = 5(dx^1)^2 + 3(dx^2)^2 + 4(dx^3)^2 - 6\,dx^1dx^2 + 4\,dx^2dx^3$，求(a) g 及(b) g^{jk}。

解　(a)　$g_{11} = 5$, $g_{22} = 3$, $g_{33} = 4$, $g_{12} = g_{21} = -3$, $g_{23} = g_{32} = 2$, $g_{13} = g_{31} = 0$. 則 $g = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$.

(b)　g_{jk} 的餘因式爲

$G(1,1) = 8$, $G(2,2) = 20$, $G(3,3) = 6$, $G(1,2) = G(2,1) = 12$, $G(2,3) = G(3,2) = -10$,

$G(1,3) = G(3,1) = -6$

則

$$g^{11}=2,\ g^{22}=5,\ g^{33}=3/2,\ g^{12}=g^{21}=3,\ g^{23}=g^{32}=-5/2,\ g^{13}=g^{31}=-3/2$$

注意矩陣 (g_{jk}) 與 (g^{jk}) 的乘積爲單位矩陣 I ，即

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3/2 \\ 3 & 5 & -5/2 \\ -3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

相伴張量

8.37 若 $A_j = g_{jk}A^k$ ，證明 $A^k = g^{jk}A_j$ 。

解 將 $A_j = g_{jk}A^k$ 乘上 g^{jq} ，則

$$g^{jq}A_j = g^{jq}g_{jk}A^k = \delta^q_k A^k = A^q,\ \text{即}\ A^q = g^{jq}A_j\ \text{或}\ A^k = g^{jk}A_j.$$

張量 A_j 及 A^k 爲 1 秩，稱爲相伴張量 (associated tensor) 。它們代表一個向量的協變及逆變分量。

8.38 (a)證明 $L^2 = g_{pq}A^pA^q$ 爲一不變量。(b)證明 $L^2 = g^{pq}A_pA_q$ 。

解 (a) 令 A_j 及 A^k 爲一向量的協變及逆變分量，則

$$\bar{A}_p = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^p}A_j,\qquad \bar{A}^q = \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^k}A^k$$

且

$$\bar{A}_p\bar{A}^p = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^k}A_jA^k = \delta^j_k A_jA^k = A_jA^j$$

所以 A_jA^j 爲一不變量，我們稱爲 L^2 。則我們可寫成

$$L^2 = A_jA^j = g_{jk}A^kA^j = g_{pq}A^pA^q$$

(b) 由(a)，

$$L^2 = A_jA^j = A_jg^{kj}A_k = g^{jk}A_jA_k = g^{pq}A_pA_q.$$

此純量或不變量 $L = \sqrt{A_pA^p}$ 稱爲帶有協變分量 A_p 及逆變分量 A^p 之向量的大小或長度。

8.39 若 A^p 及 B^q 爲向量，證明 $g_{pq}A^pB^q$ 爲一不變量。

[illegible]

解 (a) 由 8.38 題，$A^pB_p - A^pg_{pq}B^q = g_{pq}A^pB^q$ 爲一不變量。

(b) 由於 A^pA_p 及 B^qB_q 爲不變量，所以 $\sqrt{(A^pA_p)(B^qB_q)}$ 也是一個不變量，因此 $\dfrac{g_{pq}A^pB^q}{\sqrt{(A^pA_p)(B^qB_q)}}$ 也是一個不變量。

我們定義

$$\cos\theta = \frac{g_{pq}A^pB^q}{\sqrt{(A^pA_p)(B^qB_q)}}$$

爲向量 A^p 與 B^q 之夾角的餘弦値。若 $g_{pq}A^pB^q = A^pB_p = 0$，則此二向量正交。

8.40 表示下列相伴張量間的關係：

(a) A^{jkl} 與 A_{pqr}，(b) $A_{j\cdot l}^{\cdot k}$ 與 A^{qkr}，(c) $A_{\cdot q\cdot\cdot t}^{p\cdot rs\cdot}$ 與 $A_{jqk}^{\cdot\cdot\cdot sl}$

解

(a) $A^{jkl} = g^{jp}g^{kq}g^{lr}A_{pqr}$ 或 $A_{pqr} = g_{jp}g_{kq}g_{lr}A^{jkl}$

(b) $A_{j\cdot l}^{\cdot k} = g_{jq}g_{lr}A^{qkr}$ 或 $A^{qkr} = g^{jq}g^{lr}A_{j\cdot l}^{\cdot k}$

(c) $A_{\cdot q\cdot\cdot t}^{p\cdot rs\cdot} = g^{pj}g^{rk}g_{tl}A_{jqk}^{\cdot\cdot\cdot sl}$ 或 $A_{jqk}^{\cdot\cdot\cdot sl} = g_{pj}g_{rk}g^{tl}A_{\cdot q\cdot\cdot t}^{p\cdot rs\cdot}$

8.41 證明在一三維座標系中，座標曲線間的夾角 θ_{12}，θ_{23}，θ_{31} 的定義爲

$$\cos\theta_{12} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}},\quad \cos\theta_{23} = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}},\quad \cos\theta_{31} = \frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33}g_{11}}}$$

解 沿著 x^1 座標曲線，x^2 = 常數，x^3 = 常數。

則由計量式，$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2$ 或 $\dfrac{dx^1}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{g_{11}}}$。

因此沿著 x^1 曲線的一個單位切向量爲 $A_1^r = \dfrac{1}{\sqrt{g_{11}}}\delta_1^r$。同理，沿著 x^2 及 x^3 座標曲線的單位切向量分別是 $A_2^r = \dfrac{1}{\sqrt{g_{22}}}\delta_2^r$ 及 $A_3^r = \dfrac{1}{\sqrt{g_{33}}}\delta_3^r$。

A_1^r 與 A_2^r 之夾角 θ_{12} 的餘弦爲

$$\cos\theta_{12} = g_{pq}A_1^pA_2^q = g_{pq}\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\delta_1^p\delta_2^q = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$$

同理亦可得出其它的結果。

8.42 證明在一正交座標系中，$g_{12}=g_{23}=g_{31}=0$。

解 令 8.41 題中的 $\theta_{12}=\theta_{23}=\theta_{31}=90^\circ$ 可立刻求出。由 $g_{pq}=g_{qp}$ 的事實，亦可得出 $g_{21}=g_{32}=g_{13}=0$。

8.43 證明在一正交座標系中，$g_{11}=\dfrac{1}{g^{11}}$，$g_{22}=\dfrac{1}{g^{22}}$，$g_{33}=\dfrac{1}{g^{33}}$。

解 由 8.33 題，$g^{pr}g_{rq}=\delta^q_p$。

若 $p=q=1$，$g^{1r}g_{r1}=1$ 或 $g^{11}g_{11}+g^{12}g_{21}+g^{13}g_{31}=1$。

再利用 8.42 題可得

$$g_{11}=\frac{1}{g^{11}}$$

同理，若 $p=q=2$，$g_{22}=\dfrac{1}{g^{22}}$；且若 $p=q=3$，$g_{33}=\dfrac{1}{g^{33}}$。

克雷斯托福記號

8.44 證明 (a) $[pq,r]=[qp,r]$，(b) $\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} s \\ qp \end{Bmatrix}$，(c) $[pq,r]=g_{rs}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}$。

解

(a) $$[pq,r]=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q}+\frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p}-\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\right)=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p}+\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q}-\frac{\partial g_{qp}}{\partial x^r}\right)=[qp,r].$$

(b) $$\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}=g^{sr}[pq,r]=g^{sr}[qp,r]=\begin{Bmatrix} s \\ qp \end{Bmatrix}$$

(c) $$g_{ks}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}=g_{ks}g^{sr}[pq,r]=\delta^r_k[pq,r]=[pq,k]$$

或 $[pq,k]=g_{ks}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}$ 即 $[pq,r]=g_{rs}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}$.

注意在將 $[pq,r]$ 乘上 g^{sr} 時，有將 s 取代 r，升高指標，並以 { } 取代 [ ] 產生 $\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}$ 的效果。同理，將 $\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}$ 乘上 g_{rs} 或 g_{sr}，有將 r 取代 s，降低指標，並以 [ ] 取代 { } 產生 $[pq,r]$ 的效果。

8.45 證明 (a) $\dfrac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}=[pm,q]+[qm,p]$

(b) $\dfrac{\partial g^{pq}}{\partial x^m}=-g^{pn}\begin{Bmatrix} q \\ mn \end{Bmatrix}-g^{qn}\begin{Bmatrix} p \\ mn \end{Bmatrix}$

(c) $\begin{Bmatrix} p \\ pq \end{Bmatrix}=\dfrac{\partial}{\partial x^q}\ln\sqrt{g}$

答　(a) $[pm,q]+[qm,p] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{mq}}{\partial x^p}-\frac{\partial g_{pm}}{\partial x^q}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{qp}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{mp}}{\partial x^q}-\frac{\partial g_{qm}}{\partial x^p}\right) = \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}$

(b) $\frac{\partial}{\partial x^m}(g^{jk}g_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x^m}(\delta^k_i) = 0$，則

$$g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}+\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m}g_{ij} = 0 \qquad 或 \qquad g_{ij}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m} = -g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}$$

乘上 g^{ir}，

$$g^{ir}g_{ij}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m} = -g^{ir}g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}$$

即

$$\delta^r_j\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m} = -g^{ir}g^{jk}([im,j]+[jm,i])$$

若

$$\frac{\partial g^{rk}}{\partial x^m} = -g^{ir}\left\{ {k \atop im} \right\} - g^{jk}\left\{ {r \atop jm} \right\}$$

將 r，k，i，j 分別用 p，q，m，n 取代，則可得所需結果。

(c) 由 8.31 題，$g = g_{jk}G(j,k)$（僅對 k 求和）。

由於 $G(j,k)$ 明顯的不包含 g_{jk}，所以 $\frac{\partial g}{\partial g_{jr}} = G(j,r)$。再對 j 及 r 求和，

$$\frac{\partial g}{\partial x^m} = \frac{\partial g}{\partial g_{jr}}\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m} = G(j,r)\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m}$$

$$= g\,g^{jr}\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m} = g\,g^{jr}([jm,r]+[rm,j])$$

$$= g\left(\left\{ {j \atop jm} \right\}+\left\{ {r \atop rm} \right\}\right) = 2g\left\{ {j \atop jm} \right\}$$

因此

$$\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^m} = \left\{ {j \atop jm} \right\} \qquad 或 \qquad \left\{ {j \atop jm} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^m}\ln\sqrt{g}$$

將 j，m 分別用 p、q 取代則可得所需結果。

8.46　導出(a)第一類及(b)第二類克雷斯托福記號的轉換定律。

答　(a) 由於 $\bar{g}_{jk} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}g_{pq}$，所以

$$(1)\quad \frac{\partial \bar{g}_{jk}}{\partial \bar{x}^m} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} + \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^k} g_{pq} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} g_{pq}$$

由指標 j，k，m 及 p，q，r 的環狀排列可得

$$(2)\quad \frac{\partial \bar{g}_{km}}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^m} g_{qr} + \frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} g_{qr}$$

$$(3)\quad \frac{\partial \bar{g}_{mj}}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial g_{rp}}{\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^j} g_{rp} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} g_{rp}$$

將(2)與(3)相加，減去(1)，再乘上 $\frac{1}{2}$，利用第一類克雷斯托福記號的定義可得

$$(4)\quad \overline{[jk,m]} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}[pq,r] + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^m} g_{pq}$$

(b) 將(4)乘上 $\bar{g}^{nm} = \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t} g^{st}$ 可得

$$\bar{g}^{nm}\overline{[jk,m]} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t} g^{st}[pq,r] + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t} g^{st} g_{pq}$$

則

$$\overline{\left\{ {n \atop jk} \right\}} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\delta^r_t g^{st}[pq,r] + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\delta^q_t g^{st} g_{pq}$$

$$= \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\left\{ {s \atop pq} \right\} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^p}$$

因爲

$$\delta^r_t g^{st}[pq,r] = g^{sr}[pq,r] = \left\{ {s \atop pq} \right\} \quad 且 \quad \delta^q_t g^{st} g_{pq} = g^{sq} g_{pq} = \delta^s_p$$

8.47 證明 $\frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} = \overline{\left\{ {n \atop jk} \right\}}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n} - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\left\{ {m \atop pq} \right\}$.

答 由 8.46(b)題，

$$\overline{\left\{ {n \atop jk} \right\}} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\left\{ {s \atop pq} \right\} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^p}.$$

乘上 $\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n}$，

$$\overline{\left\{ {n \atop jk} \right\}}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\delta^m_s\left\{ {s \atop pq} \right\} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\delta^m_p$$

$$= \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\left\{ {m \atop pq} \right\} + \frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}$$

解出 $\dfrac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}$，即可得證。

8.48 對若 $p \neq q$，則 $g_{pq}=0$ 的空間，求(a)第一類，(b)第二類克雷斯托福記號。

解 (a) 若 $p=q=r$, $[pq,r] = [pp,p] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}+\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}-\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}$.

若 $p=q\neq r$, $[pq,r] = [pp,r] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^p}+\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^p}-\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r}$.

若 $p=r\neq q$, $[pq,r] = [pq,p] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q}+\frac{\partial g_{qp}}{\partial x^p}-\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^p}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q}$.

若 p，q，r 均不同，$[pq,r]=0$。

在此處我們不使用求和慣例。

(b) 由 8.43 題，$g^{jj}=\dfrac{1}{g_{jj}}$（不求和）。則

若 $r\neq s$，則 $\left\{ {s \atop pq} \right\} = g^{sr}[pq,r] = 0$

且若 $r=s$，則 $\left\{ {s \atop pq} \right\} = g^{ss}[pq,s] = \dfrac{[pq,s]}{g_{ss}}$（不求和）。

由(a)：

若 $p=q=s$, $\left\{ {s \atop pq} \right\} = \left\{ {p \atop pp} \right\} = \dfrac{[pp,p]}{g_{pp}} = \dfrac{1}{2g_{pp}}\dfrac{\partial g_{pp}}{\partial x^p} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x^p}\ln g_{pp}$.

若 $p=q\neq s$, $\left\{ {s \atop pq} \right\} = \left\{ {s \atop pp} \right\} = \dfrac{[pp,s]}{g_{ss}} = -\dfrac{1}{2g_{ss}}\dfrac{\partial g_{pp}}{\partial x^s}$.

若 $p=s\neq q$, $\left\{ {s \atop pq} \right\} = \left\{ {p \atop pq} \right\} = \dfrac{[pq,p]}{g_{pp}} = \dfrac{1}{2g_{pp}}\dfrac{\partial g_{pp}}{\partial x^q} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x^q}\ln g_{pp}$.

若 p，q，s 均不同，

$$\left\{ {s \atop pq} \right\} = 0$$

8.49 決定在(a)直角座標，(b)柱面座標，(c)球面座標中的第二類克雷斯托福記號。

解 由於在正交座標系中，若 $p\neq q$，$g_{pq}=0$，所以我們可以利用 8.48 題的結果。

(a) 在直角座標中，$g_{pp}=1$，所以 $\left\{ {s \atop pq} \right\} = 0$。

(b) 在柱面座標中，$x^1=\rho$，$x^2=\phi$，$x^3=z$，由 8.30(a)題我們有 $g_{11}=1$，$g_{22}=\rho^2$，$g_{33}=1$。只有在 $p=2$ 時才會有非零第二類克雷斯托福記號，

它們是

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2) = -\rho,$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{2\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2) = \frac{1}{\rho}$$

(c) 在球面座標中，$x^1 = r$，$x^2 = \theta$，$x^3 = \phi$，由 8.30(b)題我們有 $g_{11} = 1$，$g_{22} = r^2$，$g_{33} = r^2 \sin^2 \theta$。只有在 $p = 2$ 或 3 時才會有非零第二類克雷斯托福記號，分別是

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2) = -r$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{2r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2) = \frac{1}{r}$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin^2 \theta) = -r \sin^2 \theta$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 33 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = -\frac{1}{2r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}(r^2 \sin^2 \theta) = -\sin \theta \cos \theta$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 31 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 13 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g_{33}} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{r}$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 32 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 23 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g_{33}} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(r^2 \sin^2 \theta) = \cot \theta$$

測地線

8.50 證明 $I = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x})\, dt$ 爲一極值（極大或極小）的必要條件爲

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \text{。}$$

解 令使 I 爲一極值的曲線爲 $x = X(t)$，$t_1 \leq t \leq t_2$。則 $x = X(t) + \epsilon\, \eta(t)$，其中 ϵ 與 t 獨立，是一條通過 t_1，t_2 且使得 $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ 的鄰近曲線。對此鄰近曲線，I 的值爲

$$I(\epsilon) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, X + \epsilon \eta, \dot{X} + \epsilon \dot{\eta})\, dt$$

在 $\epsilon = 0$ 時，此爲一極值。而其爲極值的必要條件爲 $\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0$。假設此爲真，則由在積分符號下的微分，

$$\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\eta + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}\right)dt = 0$$

此式可寫成

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial F}{\partial x}\eta\,dt + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\eta\right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\eta\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\eta\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right)dt = 0$$

由於 η 爲任意，所以被積函數 $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0$。

這個結果可以很容易地推廣至積分 $\int_{t_1}^{t_2} F(t, x^1, \dot{x}^1, x^2, \dot{x}^2, \ldots, x^N, \dot{x}^N)\,dt$ 而產生

$$\frac{\partial F}{\partial x^k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k}\right) = 0$$

稱爲**奧依勒方程式**(Euler's equations)或**拉格朗日方程式**(Lagrange's equations)。(亦可見8.73題)

8.51　證明在里曼空間中的測地線爲 $\frac{d^2x^r}{ds^2} + \left\{\begin{matrix} r \\ pq \end{matrix}\right\}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds} = 0$。

解　我們必須利用奧依勒方程式(8.50題)，取 $F = \sqrt{g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q}$ 來決定 $\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q}\,dt$ 的極值。我們有

$$\frac{\partial F}{\partial x^k} = \frac{1}{2}(g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q)^{-1/2}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k} = \frac{1}{2}(g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q)^{-1/2}\,2g_{pk}\dot{x}^p$$

利用 $\frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q}$，奧依勒方程式可寫成

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{g_{pk}\dot{x}^p}{\dot{s}}\right) - \frac{1}{2\dot{s}}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q = 0$$

或

$$g_{pk}\ddot{x}^p + \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^q}\dot{x}^p\dot{x}^q - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q = \frac{g_{pk}\dot{x}^p\ddot{s}}{\dot{s}}$$

用 $\dfrac{\partial g_{pk}}{\partial x^q}\dot{x}^p\dot{x}^q = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{pk}}{\partial x^q}+\dfrac{\partial g_{qk}}{\partial x^p}\right)\dot{x}^p\dot{x}^q$ 可將此方程式變成

$$g_{pk}\ddot{x}^p + [pq,k]\dot{x}^p\dot{x}^q = \frac{g_{pk}\dot{x}^p\ddot{s}}{\dot{s}}$$

如果我們用弧長作爲參數，$\dot{s}=1$，$\ddot{s}=0$，則此方程式變成

$$g_{pk}\frac{d^2x^p}{ds^2} + [pq,k]\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds} = 0$$

乘上g^{rk}後可得

$$\frac{d^2x^r}{ds^2} + \begin{Bmatrix} r \\ pq \end{Bmatrix}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds} = 0$$

協變導數

8.52 若A_p及A^p爲張量，證明 (a) $A_{p,q} \equiv \dfrac{\partial A_p}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}A_s$

及 (b) $A^p_{,q} \equiv \dfrac{\partial A^p}{\partial x^q} + \begin{Bmatrix} p \\ qs \end{Bmatrix}A^s$ 爲張量。

解 (a) 由於 $\bar{A}_j = \dfrac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^j}A_r$，所以

$$(1)\qquad \frac{\partial \bar{A}_j}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial A_r}{\partial x^t}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^j\partial \bar{x}^k}A_r$$

由 8.47 題，

$$\frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^j\partial \bar{x}^k} = \overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^n} - \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k}\begin{Bmatrix} r \\ il \end{Bmatrix}$$

代入(1)得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{A}_j}{\partial \bar{x}^k} &= \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial A_r}{\partial x^t} + \overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^n}A_r - \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k}\begin{Bmatrix} r \\ il \end{Bmatrix}A_r \\ &= \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial A_p}{\partial x^q} + \overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}}\bar{A}_n - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}A_s\end{aligned}$$

或

$$\frac{\partial \bar{A}_j}{\partial \bar{x}^k} - \overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}}\bar{A}_n = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\left(\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}A_s\right)$$

因此 $\dfrac{\partial A_p}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} A_s$ 爲 2 秩協變張量，稱爲 A_p 對於 x^q 的協變導數(covariant derivative)，並記作 $A_{p,q}$。

(b) 由於 $\bar{A}^j = \dfrac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r} A^r$，所以

$$(2) \qquad \frac{\partial \bar{A}^j}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r}\frac{\partial A^r}{\partial x^t}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^r \partial x^t}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k} A^r$$

由 8.47 題將 x 與 $\bar{x}$ 座標互換得

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^r \partial x^t} = \left\{ \begin{matrix} n \\ rt \end{matrix} \right\} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n} - \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^t}\overline{\left\{ \begin{matrix} j \\ il \end{matrix} \right\}}$$

代入(2)，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{A}^j}{\partial \bar{x}^k} &= \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial A^r}{\partial x^t} + \left\{ \begin{matrix} n \\ rt \end{matrix} \right\}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k} A^r - \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^t}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\overline{\left\{ \begin{matrix} j \\ il \end{matrix} \right\}} A^r \\
&= \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial A^r}{\partial x^t} + \left\{ \begin{matrix} n \\ rt \end{matrix} \right\}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k} A^r - \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\delta^l_k \overline{\left\{ \begin{matrix} j \\ il \end{matrix} \right\}} A^r \\
&= \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \left\{ \begin{matrix} p \\ sq \end{matrix} \right\}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} A^s - \overline{\left\{ \begin{matrix} j \\ ik \end{matrix} \right\}} \bar{A}^i
\end{aligned}$$

或

$$\frac{\partial \bar{A}^j}{\partial \bar{x}^k} + \overline{\left\{ \begin{matrix} j \\ ki \end{matrix} \right\}} \bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\left(\frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \left\{ \begin{matrix} p \\ qs \end{matrix} \right\} A^s\right)$$

因此 $\dfrac{\partial A^p}{\partial x^q} + \left\{ \begin{matrix} p \\ qs \end{matrix} \right\} A^s$ 爲 2 秩混合張量，稱爲 A^p 對於 x^q 的協變導數，記作 $A^p_{,q}$。

8.53 寫出下列張量對於 x^q 的協變導數： (a) A_{jk}, (b) A^{jk}, (c) A^j_k, (d) A^j_{kl}, (e) A^{jkl}_{mn}.

解 (a) $$A_{jk,q} = \frac{\partial A_{jk}}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ jq \end{matrix} \right\} A_{sk} - \left\{ \begin{matrix} s \\ kq \end{matrix} \right\} A_{js}$$

(b) $$A^{jk}_{\ \ ,q} = \frac{\partial A^{jk}}{\partial x^q} + \left\{ \begin{matrix} j \\ qs \end{matrix} \right\} A^{sk} + \left\{ \begin{matrix} k \\ qs \end{matrix} \right\} A^{js}$$

(c) $$A^j_{k,q} = \frac{\partial A^j_k}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ kq \end{matrix} \right\} A^j_s + \left\{ \begin{matrix} j \\ qs \end{matrix} \right\} A^s_k$$

(d) $$A^j_{kl,q} = \frac{\partial A^j_{kl}}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ kq \end{matrix} \right\} A^j_{sl} - \left\{ \begin{matrix} s \\ lq \end{matrix} \right\} A^j_{ks} + \left\{ \begin{matrix} j \\ qs \end{matrix} \right\} A^s_{kl}$$

(e) $$A^{jkl}_{mn,q} = \frac{\partial A^{jkl}_{mn}}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop mq} \right\} A^{jkl}_{sn} - \left\{ {s \atop nq} \right\} A^{jkl}_{ms} + \left\{ {j \atop qs} \right\} A^{skl}_{mn} + \left\{ {k \atop qs} \right\} A^{jsl}_{mn} + \left\{ {l \atop qs} \right\} A^{jks}_{mn}$$

8.54 證明(a) g_{jk} ，(b) g^{jk} ，(c) δ^j_k 的協變導數為零。

解 (a) $$g_{jk,q} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop jq} \right\} g_{sk} - \left\{ {s \atop kq} \right\} g_{js} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} - [jq,k] - [kq,j] = 0$$ 由8.45(a)題。

(b) $$g^{jk}_{\ \ ,q} = \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^q} + \left\{ {j \atop qs} \right\} g^{sk} + \left\{ {k \atop qs} \right\} g^{js} = 0$$ 由8.45(b)題。

(c) $$\delta^j_{k,q} = \frac{\partial \delta^j_k}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop kq} \right\} \delta^j_s + \left\{ {j \atop qs} \right\} \delta^s_k = 0 - \left\{ {j \atop kq} \right\} + \left\{ {j \atop qk} \right\} = 0$$

8.55 求出 $A^j_k B^{lm}_n$ 對於 x^q 的協變導數。

解

$$\begin{aligned}(A^j_k B^{lm}_n)_{,q} &= \frac{\partial (A^j_k B^{lm}_n)}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop kq} \right\} A^j_s B^{lm}_n - \left\{ {s \atop nq} \right\} A^j_k B^{lm}_s \\ &\quad + \left\{ {j \atop qs} \right\} A^s_k B^{lm}_n + \left\{ {l \atop qs} \right\} A^j_k B^{sm}_n + \left\{ {m \atop qs} \right\} A^j_k B^{ls}_n \\ &= \left(\frac{\partial A^j_k}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop kq} \right\} A^j_s + \left\{ {j \atop qs} \right\} A^s_k \right) B^{lm}_n \\ &\quad + A^j_k \left(\frac{\partial B^{lm}_n}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop nq} \right\} B^{lm}_s + \left\{ {l \atop qs} \right\} B^{sm}_n + \left\{ {m \atop qs} \right\} B^{ls}_n \right) \\ &= A^j_{k,q} B^{lm}_n + A^j_k B^{lm}_{n,q}\end{aligned}$$

此結果說明了一個事實，即一個張量乘積的協變導數遵守在基本微積分中乘積的一般微分法則。

8.56 證明 $(g_{jk} A^{km}_n)_{,q} = g_{jk} A^{km}_{n,q}$.

解

$$(g_{jk} A^{km}_n)_{,q} = g_{jk,q} A^{km}_n + g_{jk} A^{km}_{n,q} = g_{jk} A^{km}_{n,q}$$

因為由8.45(a)題，$g_{jk,q} = 0$。在協變微分中，g_{jk}，g^{jk} 及 δ^j_k 可視為常數。

梯度、散度及旋度的張量形

8.57　證明 $\operatorname{div} A^p = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\,A^k)$.

圖　A^p 的散度爲 A^p 之協變導數的收縮，即 $A^p_{,q}$ 的收縮或 $A^p_{,p}$。則利用 8.45(c)題，

$$\operatorname{div} A^p = A^p_{,p} = \frac{\partial A^k}{\partial x^k} + \left\{ {p \atop pk} \right\} A^k$$

$$= \frac{\partial A^k}{\partial x^k} + (\frac{\partial}{\partial x^k}\ln\sqrt{g})A^k = \frac{\partial A^k}{\partial x^k} + (\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^k})A^k = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\,A^k)$$

8.58　證明 $\nabla^2\Phi = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\,g^{kr}\dfrac{\partial \Phi}{\partial x^r})$.

圖　Φ的梯度爲 $\operatorname{grad}\Phi = \nabla\Phi = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x^r}$，是一個 1 秩協變張量（見 8.6(b)題），定義爲Φ的協變導數，寫作 $\Phi_{,r}$。與 $\Phi_{,r}$ 相伴隨的 1 秩逆變張量爲 $A^k = g^{kr}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x^r}$。則由 8.57題，

$$\nabla^2\Phi = \operatorname{div}(g^{kr}\frac{\partial\Phi}{\partial x^r}) = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\,g^{kr}\frac{\partial\Phi}{\partial x^r})$$

8.59　證明 $A_{p,q} - A_{q,p} = \dfrac{\partial A_p}{\partial x^q} - \dfrac{\partial A_q}{\partial x^p}$.

圖

$$A_{p,q} - A_{q,p} = \left(\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop pq} \right\} A_s\right) - \left(\frac{\partial A_q}{\partial x^p} - \left\{ {s \atop qp} \right\} A_s\right) = \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \frac{\partial A_q}{\partial x^p}$$

這個 2 秩張量定義爲 A_p 的旋度。

8.60　在(a)柱面座標，(b)球面座標，將一向量 A^p 的散度用其自然分量表示。

圖　(a)　對柱面座標 $x^1 = \rho$，$x^2 = \phi$，$x^3 = z$，

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho^2 \quad 且 \quad \sqrt{g} = \rho \quad （見 8.30(a)題）$$

自然分量 A_ρ，A_ϕ，A_z 分別爲

$$A_\rho = \sqrt{g_{11}}\,A^1 = A^1,\quad A_\phi = \sqrt{g_{22}}\,A^2 = \rho A^2,\quad A_z = \sqrt{g_{33}}\,A^3 = A^3$$

則

$$\operatorname{div} A^p = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\, A^k)$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{\partial}{\partial \phi}(A_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_z)\right]$$

(b) 對球面座標 $x^1 = r$ ，$x^2 = \theta$ ，$x^3 = \phi$ ，

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{vmatrix} = r^4 \sin^2\theta \quad \text{且} \quad \sqrt{g} = r^2 \sin\theta$$ （見 8.30 (b)題）

自然分量 A_r ，A_θ ，A_ϕ 分別為

$$A_r = \sqrt{g_{11}}\, A^1 = A^1, \quad A_\theta = \sqrt{g_{22}}\, A^2 = rA^2, \quad A_\phi = \sqrt{g_{33}}\, A^3 = r\sin\theta\, A^3$$

則

$$\operatorname{div} A^p = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\, A^k)$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin\theta\, A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r \sin\theta\, A_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi}(r A_\phi)\right]$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

8.61 用(a)柱面座標，(b)球面座標表示 Φ 的拉卜拉士運算 $\nabla^2\Phi$ 。

圖 (a) 在柱面座標中，$g^{11} = 1$ ，$g^{22} = 1/\rho^2$ ，$g^{33} = 1$ （見 8.35 (a)題），則由 8.58 題，

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}\, g^{kr}\frac{\partial \Phi}{\partial x^r}\right)$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

(b) 在球面座標中，$g^{11} = 1$ ，$g^{22} = 1/r^2$ ，$g^{33} = 1/r^2 \sin^2\theta$ （見 8.35 (b)題）。則

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}\, g^{kr}\frac{\partial \Phi}{\partial x^r}\right)$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}$$

本性導數

8.62 假設均為 t 的可微函數，計算下列各張量的本性導數：(a) 不變量 Φ，(b) A^j，(c) A^j_k，(d) A^{jk}_{lmn}。

解 (a) $$\frac{\delta\Phi}{\delta t} = \Phi_{,q}\frac{dx^q}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^q}\frac{dx^q}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}$$ 一般導數。

(b) $$\frac{\delta A^j}{\delta t} = A^j_{,q}\frac{dx^q}{dt} = \left(\frac{\partial A^j}{\partial x^q} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} A^s\right)\frac{dx^q}{dt} = \frac{\partial A^j}{\partial x^q}\frac{dx^q}{dt} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} A^s \frac{dx^q}{dt}$$
$$= \frac{dA^j}{dt} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} A^s \frac{dx^q}{dt}$$

(c) $$\frac{\delta A^j_k}{\delta t} = A^j_{k,q}\frac{dx^q}{dt} = \left(\frac{\partial A^j_k}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix} A^j_s + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} A^s_k\right)\frac{dx^q}{dt}$$
$$= \frac{dA^j_k}{dt} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix} A^j_s \frac{dx^q}{dt} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} A^s_k \frac{dx^q}{dt}$$

(d) $$\frac{\delta A^{jk}_{lmn}}{\delta t} = A^{jk}_{lmn,q}\frac{dx^q}{dt} = \left(\frac{\partial A^{jk}_{lmn}}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ lq \end{Bmatrix} A^{jk}_{smn} - \begin{Bmatrix} s \\ mq \end{Bmatrix} A^{jk}_{lsn} - \begin{Bmatrix} s \\ nq \end{Bmatrix} A^{jk}_{lms} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} A^{sk}_{lmn} + \begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix} A^{js}_{lmn}\right)\frac{dx^q}{dt}$$
$$= \frac{dA^{jk}_{lmn}}{dt} - \begin{Bmatrix} s \\ lq \end{Bmatrix} A^{jk}_{smn}\frac{dx^q}{dt} - \begin{Bmatrix} s \\ mq \end{Bmatrix} A^{jk}_{lsn}\frac{dx^q}{dt} - \begin{Bmatrix} s \\ nq \end{Bmatrix} A^{jk}_{lms}\frac{dx^q}{dt} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} A^{sk}_{lmn}\frac{dx^q}{dt} + \begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix} A^{js}_{lmn}\frac{dx^q}{dt}$$

8.63 證明 g_{jk}，g^{jk}，δ^j_k 的本性導數均為零。

解

$$\frac{\delta g_{jk}}{\delta t} = (g_{jk,q})\frac{dx^q}{dt} = 0,\quad \frac{\delta g^{jk}}{\delta t} = g^{jk}_{\ ,q}\frac{dx^q}{dt} = 0,\quad \frac{\delta\,\delta^j_k}{\delta t} = \delta^j_{k,q}\frac{dx^q}{dt} = 0$$

由 8.54 題。

相對張量

8.64 若 A^p_q 及 B^{rs}_t 分別為權數 w_1 及 w_2 的相對張量，證明它們的內積及外積均為權數 w_1+w_2 的相對張量。

解 由假設

$$\bar{A}^j_k = J^{w_1}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^k}A^p_q,\quad \bar{B}^{lm}_n = J^{w_2}\frac{\partial\bar{x}^l}{\partial x^r}\frac{\partial\bar{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial\bar{x}^n}B^{rs}_t$$

外積爲

$$\bar{A}^j_k \bar{B}^{lm}_n = J^{w_1+w_2} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^n} A^p_q B^{rs}_t$$

是一個權數 $w_1 + w_2$ 的相對張量。對於任一內積，其爲此外積的一個收縮，亦爲權數 $w_1 + w_2$ 的相對張量。

8.65 證明 $\sqrt{g}$ 爲權數 1 的相對張量，即爲一張量密度。

圖 行列式 g 的元素是因 g_{pq} 依據轉換 $\bar{g}_{jk} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} g_{pq}$ 而得。

對兩邊取行列式，$\bar{g} = \left|\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\right| \left|\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\right| g = J^2 g$ 或 $\sqrt{\bar{g}} = J\sqrt{g}$，由此顯示 $\sqrt{g}$ 爲一權數 1 的相對張量。

8.66 證明 $dV = \sqrt{g}\, dx^1\, dx^2 \cdots dx^N$ 爲一不變量。

圖 由 8.65 題，

$$\begin{aligned} d\bar{V} &= \sqrt{\bar{g}}\, d\bar{x}^1\, d\bar{x}^2 \ldots d\bar{x}^N = \sqrt{g}\, J\, d\bar{x}^1\, d\bar{x}^2 \ldots d\bar{x}^N \\ &= \sqrt{g} \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right| d\bar{x}^1\, d\bar{x}^2 \ldots d\bar{x}^N = \sqrt{g}\, dx^1\, dx^2 \ldots dx^N = dV \end{aligned}$$

由此顯示若 Φ 爲一不變量，則對任一座標系

$$\int_{\bar{V}} \cdots \int \bar{\Phi}\, d\bar{V} = \int_{V} \cdots \int \Phi\, dV$$

其中積分是在 N 維空間中之一體積上演算。對曲面積分亦有類似的敍述。

其他應用問題

8.67 用張量形表示一質點的(a)速度及(b)加速度。

圖 (a) 若質點沿曲線 $x^k = x^k(t)$ 運動，其中 t 代表時間參數。則 $v^k = \frac{dx^k}{dt}$ 爲其速度，且爲 1 秩逆變張量（見 8.9 題）。

(b) 量 $\frac{dv^k}{dt} = \frac{d^2 x^k}{dt^2}$ 一般不是一個張量，所以不能表示在所有座標系中的物理量加速度。我們定義加速度 a^k 爲速度 v^k 的本性導數，即 $a^k = \frac{\delta v^k}{\delta t}$，其爲 1 秩逆變張量。

8.68 用張量形寫出牛頓定律。

圖 假設此質點的質量 M 與時間 t 無關。則 1 秩逆變張量 $Ma^k = F^k$ 稱爲在此質點

上的力（force）。因此牛頓定律可以寫成

$$F^k = Ma^k = M\frac{\delta v^k}{\delta t}$$

8.69 證明 $a^k = \dfrac{\delta v^k}{\delta t} = \dfrac{d^2x^k}{dt^2} + \begin{Bmatrix} k \\ pq \end{Bmatrix}\dfrac{dx^p}{dt}\dfrac{dx^q}{dt}$.

解 由於 v^k 爲一逆變張量，則由 8.62(b)題可得

$$\frac{\delta v^k}{\delta t} = \frac{dv^k}{dt} + \begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix} v^s \frac{dx^q}{dt} = \frac{d^2x^k}{dt^2} + \begin{Bmatrix} k \\ qp \end{Bmatrix} v^p \frac{dx^q}{dt}$$

$$= \frac{d^2x^k}{dt^2} + \begin{Bmatrix} k \\ pq \end{Bmatrix}\frac{dx^p}{dt}\frac{dx^q}{dt}$$

8.70 求一質點之(a)速度，(b)加速度在柱面座標中的自然分量。

解 (a) 由 8.67(a)題：速度的逆變分量爲

$$\frac{dx^1}{dt} = \frac{d\rho}{dt}, \quad \frac{dx^2}{dt} = \frac{d\phi}{dt}, \quad \frac{dx^3}{dt} = \frac{dz}{dt}$$

則其自然分量爲

$$\sqrt{g_{11}}\frac{dx^1}{dt} = \frac{d\rho}{dt}, \quad \sqrt{g_{22}}\frac{dx^2}{dt} = \rho\frac{d\phi}{dt}, \quad \sqrt{g_{33}}\frac{dx^3}{dt} = \frac{dz}{dt}$$

（利用 $g_{11} = 1$，$g_{22} = \rho^2$，$g_{33} = 1$）。

(b) 由 8.69 題及 8.49(b)題，加速度的逆變分量爲

$$a^1 = \frac{d^2x^1}{dt^2} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix}\frac{dx^2}{dt}\frac{dx^2}{dt} = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$$

$$a^2 = \frac{d^2x^2}{dt^2} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix}\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^2}{dt} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix}\frac{dx^2}{dt}\frac{dx^1}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\frac{d\phi}{dt}$$

$$a^3 = \frac{d^2x^3}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

則其自然分量爲

$$\sqrt{g_{11}}\,a^1 = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2, \quad \sqrt{g_{22}}\,a^2 = \rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}, \quad \sqrt{g_{33}}\,a^3 = \ddot{z}$$

其中點代表對時間的微分。

8.71 若一固定質量 M 且速度大小爲 v 的質點，其動能 $T = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mg_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q$，證明

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^k} = Ma_k$$

其中 a_k 代表加速度的協變分量。

解 由於 $T = \frac{1}{2}Mg_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q$，我們有

$$\frac{\partial T}{\partial x^k} = \frac{1}{2}M\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k} = Mg_{kq}\dot{x}^q \quad , \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}\right) = M\left(g_{kq}\ddot{x}^q + \frac{\partial g_{kq}}{\partial x^j}\dot{x}^j\dot{x}^q\right)$$

則

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^k} &= M\left(g_{kq}\ddot{x}^q + \frac{\partial g_{kq}}{\partial x^j}\dot{x}^j\dot{x}^q - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q\right) \\
&= M\left(g_{kq}\ddot{x}^q + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kq}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{kp}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^p\dot{x}^q\right) \\
&= M(g_{kq}\ddot{x}^q + [pq,k]\dot{x}^p\dot{x}^q) \\
&= Mg_{kr}\left(\ddot{x}^r + \left\{ {r \atop pq} \right\}\dot{x}^p\dot{x}^q\right) = Mg_{kr}a^r = Ma_k
\end{aligned}$$

（由 8.69 題）。此結果可用來表示在不同座標系中的加速度。

8.72 利用 8.71 題求一質點之加速度在柱面座標中的自然分量。

解 因爲 $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2$，所以

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2 \text{ 且 } T = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2).$$

由 8.71 題，取 $x^1 = \rho$，$x^2 = \phi$，$x^3 = z$ 我們發現

$$a_1 = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2, \quad a_2 = \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}), \quad a_3 = \ddot{z}$$

則自然分量爲

$$\frac{a_1}{\sqrt{g_{11}}}, \frac{a_2}{\sqrt{g_{22}}}, \frac{a_3}{\sqrt{g_{33}}} \quad \text{或} \quad \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2, \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}), \ddot{z}$$

因爲 $g_{11} = 1$，$g_{22} = \rho^2$，$g_{33} = 1$。與 8.70 題比較看看。

8.73 若作用在一質點上的協變力爲 $F_k = -\frac{\partial V}{\partial x^k}$，其中 $V(x^1, \cdots, x^N)$ 爲位能

證明 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0$，其中 $L = T - V$。

解 由$L = T - V$，由於V與$\dot{x}^k$獨立，所以 $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}$ 。則由 8.71 題，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^k} = Ma_k = F_k = -\frac{\partial V}{\partial x^k} \quad \text{即} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0$$

函數L稱爲拉格朗日函數(Lagrangean)，包含L的方程式，稱爲拉格朗日方程式(Lagrange's equations)，在力學中非常重要。由 8.50 題可推得此題之結果與敍述“一質點以使$\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$ 爲一極值的方式移動”等價。稱爲哈米吞原理(Hamilton's principle)。

8.74 用張量形表示散度定理。

解 令A^k定義了一個 1 秩張量場，且令ν_k代表包圍體積V之封閉曲面S上任一點的向外單位法向量。則散度定理說明

$$\iiint_V A^k_{,k}\, dV = \iint_S A^k \nu_k\, dS$$

對N維空間，此三重積分要用N重積分取代，而二重積分要用$N-1$重積分取代。不變量$A^k_{,k}$爲A^k的散度(見 8.57 題)。不變量$A^k \nu_k$爲A^k與ν_k 的純量積，類似於第二章的向量符號$\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}$。

我們已能用張量形來表示此定理，由於它在直角座標中是正確的(見第 6 章)，所以它對所有的座標系也都是正確的。請參考 8.66 題。

8.75 用張量形表示馬克士威方程式

(a) $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, (b) $\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho$, (c) $\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, (d) $\nabla\times\mathbf{H} = \frac{4\pi\mathbf{I}}{c}$

解 定義張量B^k，D^k，E_k，H_k，I^k，並假設ρ及c爲不變量。則方程式可寫成

(a) $B^k_{,k} = 0$

(b) $D^k_{,k} = 4\pi\rho$

(c) $-\epsilon^{jkq} E_{k,q} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B^j}{\partial t}$ 或 $\epsilon^{jkq} E_{k,q} = \frac{1}{c}\frac{\partial B^j}{\partial t}$

(d) $-\epsilon^{jkq} H_{k,q} = \frac{4\pi I^j}{c}$ 或 $\epsilon^{jkq} H_{k,q} = -\frac{4\pi I^j}{c}$

這些方程式形成電磁理論的基礎。

8.76 (a) 證明 $A_{p,qr} - A_{p,rq} = R^n_{pqr} A_n$，其中$A_n$爲任一 1 秩協變張量。

(b) 證明R^n_{pqr}爲一張量。

(c) 證明$R_{pqrs}=g_{ns}R^{n}_{pqr}$ 爲一張量。

解 (a)
$$A_{p,qr} = (A_{p,q})_{,r} = \frac{\partial A_{p,q}}{\partial x^r} - \left\{ {j \atop pr} \right\} A_{j,q} - \left\{ {j \atop qr} \right\} A_{p,j}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \left\{ {j \atop pq} \right\} A_j\right) - \left\{ {j \atop pr} \right\}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x^q} - \left\{ {k \atop jq} \right\} A_k\right) - \left\{ {j \atop qr} \right\}\left(\frac{\partial A_p}{\partial x^j} - \left\{ {l \atop pj} \right\} A_l\right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_p}{\partial x^r \partial x^q} - \frac{\partial}{\partial x^r}\left\{ {j \atop pq} \right\} A_j - \left\{ {j \atop pq} \right\}\frac{\partial A_j}{\partial x^r} - \left\{ {j \atop pr} \right\}\frac{\partial A_j}{\partial x^q} + \left\{ {j \atop pr} \right\}\left\{ {k \atop jq} \right\} A_k$$

$$- \left\{ {j \atop qr} \right\}\frac{\partial A_p}{\partial x^j} + \left\{ {j \atop qr} \right\}\left\{ {l \atop pj} \right\} A_l$$

將 q 與 r 互換並相減，我們可得

$$A_{p,qr} - A_{p,rq} = \left\{ {j \atop pr} \right\}\left\{ {k \atop jq} \right\} A_k - \frac{\partial}{\partial x^r}\left\{ {j \atop pq} \right\} A_j - \left\{ {j \atop pq} \right\}\left\{ {k \atop jr} \right\} A_k + \frac{\partial}{\partial x^q}\left\{ {j \atop pr} \right\} A_j$$

$$= \left\{ {k \atop pr} \right\}\left\{ {j \atop kq} \right\} A_j - \frac{\partial}{\partial x^r}\left\{ {j \atop pq} \right\} A_j - \left\{ {k \atop pq} \right\}\left\{ {j \atop kr} \right\} A_j + \frac{\partial}{\partial x^q}\left\{ {j \atop pr} \right\} A_j$$

$$= R^{j}_{pqr} A_j$$

其中

$$R^{j}_{pqr} = \left\{ {k \atop pr} \right\}\left\{ {j \atop kq} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^r}\left\{ {j \atop pq} \right\} - \left\{ {k \atop pq} \right\}\left\{ {j \atop kr} \right\} + \frac{\partial}{\partial x^q}\left\{ {j \atop pr} \right\}$$

用 n 取代 j 則得所需結果。

(b) 由於 $A_{p,qr} - A_{p,rq}$ 爲一張量，所以 $R^{n}_{pqr}A_n$ 爲一張量。並且因爲 A_n 爲任一張量，所以由商律 R^{n}_{pqr} 爲一張量。這個張量稱爲**黎曼－克雷斯托福張量**（Riemann-Christoffel tensor），有時候也寫成 $R^{\cdot n}_{\cdot pqr}$，$R^{\cdots n}_{pqr\cdot}$ 或簡寫成 R^{n}_{pqr}。

(c) $R_{pqrs}=g_{ns}R^{n}_{pqr}$ 爲 R^{n}_{pqr} 的相伴張量，所以也是一個張量。它稱爲**協變曲率張量**（covariant curvature tensor），在愛因斯坦相對性理論中非常重要。

補充題

補充題的答案列於本章末。

8.77 用求和慣例寫出下列各式。

(a) $a_1x^1x^3 + a_2x^2x^3 + \dots + a_Nx^Nx^3$

(b) $A^{21}B_1 + A^{22}B_2 + A^{23}B_3 + \dots + A^{2N}B_N$

(c) $A^j_1B^1 + A^j_2B^2 + A^j_3B^3 + \dots + A^j_NB^N$

(d) $g^{21}g_{11} + g^{22}g_{21} + g^{23}g_{31} + g^{24}g_{41}$

(e) $B^{121}_{11} + B^{122}_{12} + B^{221}_{21} + B^{222}_{22}$

8.78 寫出下列之和的各項。

(a) $\dfrac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\,A^k)$, $N=3$　　(b) $A^{jk}B_k^p C_j$, $N=2$　　(c) $\dfrac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}\dfrac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m}$

8.79 $a_k x^k x^k = 1$ 所表示的軌跡為何？其中 x^k，$k=1, 2, \cdots, N$ 為直角座標，a_k 為正常數，且 $N=2$，3 或 4。

8.80 若 $N=2$，寫出 $a_{pq}x^q = b_p$ 所代表的方程組。

8.81 寫出張量(a) a_i^{jk}，(b) B_m^{ijk}，(c) C_{mn}，(d) A_m 的變換定律。

8.82 若量 $B(j, k, m)$ 及 $C(j, k, m, n)$ 由座標系 x^i 轉換至 $\bar{x}^i$ 的變換法則為

(a) $\bar{B}(p, q, r) = \dfrac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^p}\dfrac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^q}\dfrac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^m}B(j, k, m)$　　(b) $\bar{C}(p, q, r, s) = \dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j}\dfrac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\dfrac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^r}\dfrac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^n}C(j, k, m, n)$

決定 $B(j, k, m)$ 及 $C(j, k, m, n)$ 是否為張量？若是，寫出此張量的通常記號，表示出其秩數及協變、逆變的階數。

8.83 一個在 4 維空間中的 5 秩張量有多少分量？

8.84 證明若一張量在某一座標系中的分量均為零，則其在任一座標系中的分量均為零。

8.85 證明若兩張量在某一座標系中的各分量均相等，則它們在任一座標系中的分量也相等。

8.86 證明流體的速度 $\dfrac{dx^k}{dt} = v^k$ 為張量，但 $\dfrac{dv^k}{dt}$ 不是張量。

8.87 若一張量在直角座標中的協變分量為 $2x-z$，x^2y，yz。求此張量在(a)柱面座標 ρ，ϕ，z 及(b)球面座標 r，θ，ϕ 中的協變及逆變分量。

8.88 一張量在直角座標中的逆變分量為 yz，3，$2x+y$。求其在拋物柱面座標中的協變分量。

8.89 計算 (a) $\delta_q^p B_p^{rs}$，(b) $\delta_q^p \delta_s^r A^{qs}$，(c) $\delta_q^p \delta_r^q \delta_s^r$，(d) $\delta_q^p \delta_r^q \delta_s^r \delta_p^s$。

8.90 若 A_r^{pq} 為一張量，證明 A_r^{pr} 為 1 秩逆變張量。

8.91 證明 $\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j \neq k \\ 0 & j = k \end{cases}$ 不是如它符號所示的為一協變張量。

8.92 若 $\bar{A}_p = \dfrac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p}A_q$，證明 $A_q = \dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q}\bar{A}_p$。

8.93 若 $\bar{A}_r^p = \dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q}\dfrac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^r}A_s^q$，證明 $A_s^q = \dfrac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p}\dfrac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s}\bar{A}_r^p$。

8.94 若Φ爲一不變量，決定 $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^p\,\partial x^q}$ 是否爲一張量。

8.95 若A^p_q及B_r爲張量，證明$A^p_q B^r$及$A^p_q B^q$均爲張量，並求出其秩數。

8.96 證明若A^{pq}_{rs}爲一張量，則$A^{pq}_{rs}+A^{qp}_{sr}$爲對稱張量且$A^{pq}_{rs}-A^{qp}_{sr}$爲反對稱張量。

8.97 若A^{pq}與B_{rs}均爲反對稱張量，證明$C^{pq}_{rs}=A^{pq}B_{rs}$爲對稱。

8.98 若一張量爲對稱（反對稱），則此張量的重覆收縮仍爲對稱（反對稱）。

8.99 若A_{pq}爲一反對稱張量，證明$A_{pq}x^p x^q=0$。

8.100 若(a)$N=4$，(b)$N=6$，則一個2秩對稱逆變張量最多有多少不同的分量？對任意的N，此數目爲何？

8.101 一個3秩反對稱協變張量，除了正負差異外，有多少不同的非零分量？

8.102 若A^{pq}_{rs}爲一張量，證明其經過兩次收縮會產生一個不變量。

8.103 證明一個R秩張量經過重覆收縮會變成一個不變量的充要條件爲R是一個偶數，且其協變及逆變指標的數目均爲$R/2$。

8.104 若A_{pq}及B^{rs}爲張量，證明它們的外積爲一4秩張量，而兩個內積分別是一個2秩張量及零秩張量。

8.105 若$A(p,q)B_q=C^p$，其中B_q爲任意1秩協變張量，C^p爲1秩逆變張量。證明$A(p,q)$一定是一個2秩混合張量。

8.106 令A^p及B_q爲任意張量，證明若$A^pB_qC(p,q)$爲一不變量，則$C(p,q)$爲一張量且可寫成C^q_p。

8.107 若A，B爲下列矩陣，求和$S=A+B$，差$D=A-B$，積$P=AB$及$Q=BA$。

(a) $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$

(b) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & -2 & 2\\ -1 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & -4\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix}$

8.108 若A，B爲上題之矩陣，求$(3A-2B)(2A-B)$。

8.109 (a) 用8.107題的矩陣，證實$\det(AB)=\{\det A\}\{\det B\}$。

(b) 是否$\det(AB)=\det(BA)$？

8.110 令 $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$

證明(a) AB 有定義，並求出它。(b) BA 及 $A+B$ 沒有定義。

8.111 求 x，y，z 使得 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

8.112 一方陣 A 的反矩陣記作 A^{-1}，由方程式 $AA^{-1}=I$ 定義，其中 I 爲單位矩陣。

若 (a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$，(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 求 A^{-1}。

在此題中，是否 $A^{-1}A=I$?

8.113 證明 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ 沒有反矩陣。

8.114 若 A，B 均爲非奇異方陣，證明 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

8.115 用矩陣符號表示(a)一逆變向量，(b)一 2 秩協變張量，(c)一 2 秩混合張量的變換方程式。

8.116 若 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$，$X$ 爲任意矩陣，試求一常數 λ 使得 $AX=\lambda X$。這些 λ 值稱爲矩陣 A 的**特徵值**（characteristic value）或**固有值**（eigenvalue）。

8.117 在上一題中，決定矩陣 A 之特徵值的方程式 $F(\lambda)$ 稱爲 A 的**特徵方程式**（characteristic equation）。證明 $F(A)=O$，此處 $F(A)$ 是將特徵方程式中的 λ 用 A 取代，常數項 c 用 cI 取代所得到的矩陣，而 O 爲零矩陣。此結果爲**平米爾-凱雷定理**（Hamilton-Cayley theorem）的一個特例，此定理是說一矩陣滿足其本身的特徵方程式。

8.118 證明 $(AB)^T=B^TA^T$。

8.119 決定(a)拋物柱面座標，(b)橢圓柱面座標中的計量張量及共軛計量張量。

8.120 證明在仿射變換（affine transformation）$\bar{x}^r=a_p^r x^p+b^r$ 之下，一個張量的協變分量和逆變分量沒有分別，在變換中 a_p^r 及 b^r 爲使得 $a_p^r a_q^r=\delta_q^p$ 的常數。若此變換是由直角座標系轉換至其他的座標系，則此張量稱爲**笛卡兒張量**（Cartesian tensor）。

8.121 求對應於 $ds^2 = 3(dx^1)^2 + 2(dx^2)^2 + 4(dx^3)^2 - 6\,dx^1dx^3$ 的 g 及 g^{jk}。

8.122 若 $A^k=g^{jk}A_j$，證明 $A_j=g_{jk}A^k$，反之亦然。

8.123 表示出下列相伴張量間的關係。

(a) A^{pq} 與 $A_{j}^{\cdot q}$，(b) $A_{\cdot q}^{p \cdot r}$ 與 A_{jql}，(c) $A_{pq}^{\cdot \cdot r}$ 與 $A_{\cdot \cdot l}^{jk}$.

8.124 證明 (a) $A_{p}^{\cdot q} B_{\cdot rs}^{p} = A^{pq} B_{prs}$，(b) $A_{\cdot \cdot r}^{pq} B_{p}^{\cdot r} = A_{p \cdot r}^{\cdot q} B^{pr} = A_{p}^{\cdot qr} B_{\cdot r}^{p}$。由此顯示了一個一般的結論：在一項中的啞指標可以由上部位置降下，或由下部位置上升而不會改變此項的值。

8.125 證明若 $A_{\cdot qr}^{p} = B_{\cdot q}^{p} C_r$，則 $A_{pqr} = B_{pq} C_r$ 且 $A_{p}^{\cdot qr} = B_{p}^{\cdot q} C^r$。由此顯示在一張量方程式中的一個自由指標可以上升或下降，而不會影響此方程式的正確性。

8.126 證明張量 g_{pq}，g_{qp} 及 δ_q^p 爲相伴張量。

8.127 證明 (a) $\bar{g}_{jk} \dfrac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} = g_{pq} \dfrac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}$，(b) $\bar{g}^{jk} \dfrac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} = g^{pq} \dfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}$.

8.128 若 A^p 爲一向量場，求其對應的單位向量。

8.129 證明3維單位向量 U^i 與座標曲線之夾角的餘弦值爲 $\dfrac{U_1}{\sqrt{g_{11}}}$，$\dfrac{U_2}{\sqrt{g_{22}}}$，$\dfrac{U_3}{\sqrt{g_{33}}}$。

8.130 決定在(a)直角座標，(b)柱面座標，(c)球面座標中的第一類克雷斯托福記號。

8.131 決定在(a)拋物柱面座標，(b)橢圓柱面座標中的第一類及第二類克雷斯托福記號。

8.132 求(a)柱面座標，(b)球面座標中測地線的微分方程式。

8.133 證明在一平面上的測地線爲直線。

8.134 證明在一球面上的測地線爲大圓弧。

8.135 寫出計量式

$$ds^2 = (dx^1)^2 + [(x^2)^2 - (x^1)^2](dx^2)^2$$

的第二類克雷斯托福記號及對應的測地線方程式。

8.136 寫出下列張量對於 x^q 的協變導數：

(a) A_{l}^{jk}，(b) A_{lm}^{jk}，(c) A_{klm}^{j}，(d) A_{m}^{jkl}，(e) A_{lmn}^{jk}.

8.137 求(a) $g_{jk} A^k$，(b) $A^j B_k$，(c) $\delta_k^j A_j$ 對於 x^q 的協變導數。

8.138 利用關係式 $A^j = g^{jk} A_k$，由 A_k 的協變導數，求出 A^j 的協變導數。

8.139 若 Φ 爲一不變量，證明 $\Phi_{,pq} = \Phi_{,qp}$，即一不變量之協變微分的順序是不重要的。

8.140 證明 ϵ_{pqr} 及 ϵ^{pqr} 分別爲協變及逆變張量。

8.141 用一向量A^p在(a)拋物柱面座標，(b)拋物面座標中的自然分量來表示其散度。

8.142 求 grad Φ 在(a)拋物柱面座標，(b)橢圓柱面座標中的自然分量。

8.143 在拋物柱面座標中，求$\nabla^2\Phi$。

8.144 利用張量符號，顯示(a) div curl $A^r = 0$，(b) curl grad $\Phi = 0$。

8.145 計算下列張量場的本性導數，假設均為t的可微函數：

(a) A_k, (b) A^{jk}, (c) $A_j B^k$, (d) ϕA^j_k 其中ϕ為一不變量。

8.146 求(a) $g_{jk}A^k$, (b) $\delta^j_k A_j$, (c) $g_{jk}\delta^j_r A^r_p$的本性導數。

8.147 證明 $\dfrac{d}{dt}(g^{pq}A_pA_q) = 2g^{pq}A_p\dfrac{\delta A_q}{\delta t}$。

8.148 證明若無外力作用，一固定質量的運動質點沿測地線

$$\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx^p}{ds}\right) = 0.$$

移動。

8.149 證明兩同權數且同型的相對張量的和還是一個同權數同型的相對張量。

8.150 若A^{pq}_r為一權數w的相對張量，證明$g^{-w/2}A^{pq}_r$為一絕對張量。

8.151 若$A(p, q)B^{qs}_r = C^s_{pr}$，其中$B^{qs}_r$為任一權數$w_1$的相對張量，且$C^s_{pr}$為一權數$w_2$的已知相對張量。證明$A(p, q)$為權數$w_2 - w_1$的相對張量。這是相對張量之商律的一個例子。

8.152 證明 8.31 題中的量$G(j, k)$為一權數 2 的相對張量。

8.153 在球面座標中，求一質點之(a)速度及(b)加速度的自然分量。

8.154 令A^r及B^r為三維空間中的二向量，證明若λ及μ為常數，則$C^r = \lambda A^r + \mu B^r$為落在由$A^r$及$B^r$所決定之平面上的向量。對更高維空間，此結果如何解釋？

8.155 證明曲面$\phi(x^1, x^2, x^3) =$常數的一個法向量為$A^p = g^{pq}\dfrac{\partial\phi}{\partial x^q}$。求對應的單位向量。

8.156 連續性方程式為$\nabla\cdot(\sigma v) + \dfrac{\partial\sigma}{\partial t} = 0$，其中$\sigma$為流體的密度，而$v$為流體的速度。用張量形表示此方程式。

8.157 在(a)柱面座標及(b)球面座標表示連續性方程式。

8.158 用張量形表示司托克士定理。

8.159 證明協變曲率張量R_{pqrs}對(a) p 及 q，(b) r 及 s，(c) q 及 s 爲反對稱。

8.160 證明$R_{pqrs} = R_{rspq}$。

8.161 證明

(a) $R_{pqrs} - R_{psqr} + R_{prsq} = 0,$

(b) $R_{pqrs} + R_{rqps} - R_{rspq} + R_{psrq} = 0.$

8.162 證明在歐氏空間中的協變微分可交換。由此顯示在歐氏空間中里曼－克雷斯托福張量及曲率張量爲零。

8.163 令$T^p = \dfrac{dx^p}{ds}$爲曲線C：$x^p = x^p(s)$的切向量，其中s爲弧長。(a)證明$g_{pq}T^pT^q = 1$。(b)證明$g_{pq}T^p\dfrac{\delta T^q}{\delta s} = 0$並由此顯示，對適當的$\kappa$，$N^q = \dfrac{1}{\kappa}\dfrac{\delta T^q}{\delta s}$爲$C$的一個單位法向量。(c)證明$\dfrac{\delta N^q}{\delta s}$與$N^q$正交。

8.164 使用上題的符號，證明

(a) $g_{pq}T^pN^q = 0$, (b) $g_{pq}T^p\dfrac{\delta N^q}{\delta s} = -\kappa$ 或 $g_{pq}T^p\left(\dfrac{\delta N^q}{\delta s} + \kappa T^q\right) = 0.$

由此顯示對適當的τ，$B^r = \dfrac{1}{\tau}\left(\dfrac{\delta N^r}{\delta s} + \kappa T^r\right)$同時與$T^p$及$N^q$正交。

8.165 證明弗來納與夕瑞公式（Frenet-Serret formula）

$$\frac{\delta T^p}{\delta s} = \kappa N^p, \quad \frac{\delta N^p}{\delta s} = \tau B^p - \kappa T^p, \quad \frac{\delta B^p}{\delta s} = -\tau N^p$$

其中T^p，N^p，B^p分別爲C的單位切向量、法向量及從法向量，而κ和τ爲C的曲率及撓率。

8.166 證明$ds^2 = c^2(dx^4)^2 - dx^k dx^k$（$N = 3$）在線性（仿射）變換

$$\bar{x}^1 = \gamma(x^1 - vx^4), \quad \bar{x}^2 = x^2, \quad \bar{x}^3 = x^3, \quad \bar{x}^4 = \gamma\left(x^4 - \frac{\beta}{c}x^1\right)$$

之下爲一不變量。其中γ，β，c及v爲常數，$\beta = v/c$，$\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$。此變換爲特殊相對性的洛仁子變換（Lorentz transformation）。在物理學上，當一個觀察者在x^i系的原點在時間x^4時看見一件事發生在位置x^1，x^2，x^3；而另一個在$\bar{x}^i$系之原點的觀察者，在時間$\bar{x}^4$時看見同一事件發生在位置$\bar{x}^1$，$\bar{x}^2$，$\bar{x}^3$。這是在下列假設之下：(1)此二系統的x^1與$\bar{x}^1$軸重合，(2)正x^2軸與正x^3軸分別和正$\bar{x}^2$軸及正$\bar{x}^3$軸平行，(3)$\bar{x}^i$系統相對於x^i系統的運動速度爲v，(4)光速c爲一

常數。

8.167 證明一根固定在$\overline{x}^i(x^i)$系中，與$\overline{x}^1(x^1)$軸平行放置且在此系統中長度爲L的木棍，對一個固定在$x^i(\overline{x}^i)$系統中的觀察者而言，長度似乎縮短成$L\sqrt{1-\beta^2}$。此現象稱爲洛仁子-菲次吉拉德收縮（Lorentz-Fitzgerald contraction）。

補充題解答

8.77 (a) $a_k x^k x^3$　(b) $A^{2j}B_j$　(c) $A^j_k B^k$　(d) $g^{2q}g_{q1}$, $N=4$　(e) B^{p2r}_{pr}, $N=2$

8.78 (a) $\dfrac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g}\,A^1) + \dfrac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g}\,A^2) + \dfrac{\partial}{\partial x^3}(\sqrt{g}\,A^3)$

(b) $A^{11}B^p_1C_1 + A^{21}B^p_1C_2 + A^{12}B^p_2C_1 + A^{22}B^p_2C_2$

(c) $\dfrac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^1}\dfrac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^m} + \dfrac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^2}\dfrac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^m} + \cdots + \dfrac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^N}\dfrac{\partial x^N}{\partial \overline{x}^m}$

8.79 $N=2$時爲橢圓，$N=3$時爲橢面，$N=4$時爲超橢面。

8.80 $\begin{cases} a_{11}x^1 + a_{12}x^2 = b_1 \\ a_{21}x^1 + a_{22}x^2 = b_2 \end{cases}$

8.81 (a) $\overline{A}^{pq}_r = \dfrac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^i}\dfrac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^j}\dfrac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^r}A^{ij}_k$　　(c) $\overline{C}_{pq} = \dfrac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^p}\dfrac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^q}C_{mn}$

(b) $\overline{B}^{pqr}_s = \dfrac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^i}\dfrac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^j}\dfrac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^k}\dfrac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^s}B^{ijk}_m$　　(d) $\overline{A}_p = \dfrac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^p}A_m$

8.82 (a) $B(j,k,m)$爲3秩張量，協變階數爲2，逆變階數爲1，可寫成B^m_{jk}。

(b) $C(j,k,m,n)$不是一個張量。

8.83 $4^5=1024$

8.87 (a) $2\rho\cos^2\phi - z\cos\phi + \rho^3\sin^2\phi\cos^2\phi$,

$-2\rho^2\sin\phi\cos\phi + \rho z\sin\phi + \rho^4\sin\phi\cos^3\phi$,

$\rho z\sin\phi$.

(b) $2r\sin^2\theta\cos^2\phi - r\sin\theta\cos\theta\cos\phi + r^3\sin^4\theta\sin^2\phi\cos^2\phi + r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin\phi$,

$2r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi - r^2\cos^2\theta\cos\phi + r^4\sin^3\theta\cos\theta\sin^2\phi\cos^2\phi$
$- r^3\sin^2\theta\cos\theta\sin\phi$,

$-2r^2\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi + r^2\sin\theta\cos\theta\sin\phi + r^4\sin^4\theta\sin\phi\cos^3\phi$

8.88 u^2vz+3v, $3u-uv^2z$, u^2+uv-v^2

8.89 (a) B^{rs}_q, (b) A^{pr}, (c) δ^p_s, (d) 1

8.94 不是張量

8.95 分別爲3秩和1秩

8.98 是的

8.100 (a) 10, (b) 21, (c) $N(N+1)/2$

8.101 $N(N-1)(N-2)/6$

8.107 (a) $S=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix} 18 & 8 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$

(b) $S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ -9 & -7 & 10 \\ 9 & 9 & -16 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 8 & -16 & 11 \\ -2 & 10 & -7 \end{pmatrix}$

8.108 (a) $\begin{pmatrix} -52 & -86 \\ 104 & 76 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 & -16 & 20 \\ 9 & 163 & -136 \\ -61 & -135 & 132 \end{pmatrix}$

8.110 $\begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -4 & 17 & -2 \end{pmatrix}$

8.111 $x=-1,\ y=3,\ z=2$

8.112 (a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ -5/3 & 1/3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 是

8.115 (a)
$$\begin{pmatrix} \bar{A}^1 \\ \bar{A}^2 \\ \bar{A}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{13} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} \\ \bar{A}_{31} & \bar{A}_{32} & \bar{A}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} \end{pmatrix}$$

(c)
$$\begin{pmatrix} \bar{A}_1^1 & \bar{A}_2^1 & \bar{A}_3^1 \\ \bar{A}_1^2 & \bar{A}_2^2 & \bar{A}_3^2 \\ \bar{A}_1^3 & \bar{A}_2^3 & \bar{A}_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} \end{pmatrix}$$

8.116 $\lambda = 4, -1$

8.119 (a) $\begin{pmatrix} u^2+v^2 & 0 & 0 \\ 0 & u^2+v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{u^2+v^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2+v^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v) & 0 & 0 \\ 0 & a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8.121 $g = 6$, $(g^{jk}) = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8.123 (a) $A^{pq} = g^{pj} A_{j}^{\cdot q}$, (b) $A_{\cdot q}^{p \cdot r} = g^{pj} g^{rl} A_{jql}$, (c) $A_{pq}^{\cdot\cdot r} = g_{pj} g_{qk} g^{rl} A_{\cdot\cdot l}^{jk}$

8.128 $\dfrac{A^p}{\sqrt{A^p A_p}}$ 或 $\dfrac{A^p}{\sqrt{g_{pq} A^p A^q}}$

8.130 (a) 均爲 0 。
(b) $[22,1] = -\rho$, $[12,2] = [21,2] = \rho$. 其他的均爲 0 。
(c) $[22,1] = -r$, $[33,1] = -r\sin^2\theta$, $[33,2] = -r^2\sin\theta\cos\theta$
$[21,2] = [12,2] = r$, $[31,3] = [13,3] = r\sin^2\theta$
$[32,3] = [23,3] = r^2\sin\theta\cos\theta$. 其他的均爲 0 。

8.131 (a) $[11,1] = u$, $[22,2] = v$, $[11,2] = -v$, $[22,1] = -u$,
$[12,1] = [21,1] = v$, $[21,2] = [12,2] = u$.

$\left\{ {1 \atop 11} \right\} = \dfrac{u}{u^2+v^2}$, $\left\{ {2 \atop 22} \right\} = \dfrac{v}{u^2+v^2}$, $\left\{ {1 \atop 22} \right\} = \dfrac{-u}{u^2+v^2}$, $\left\{ {2 \atop 11} \right\} = \dfrac{-v}{u^2+v^2}$,

$\left\{ {1 \atop 21} \right\} = \left\{ {1 \atop 12} \right\} = \dfrac{v}{u^2+v^2}$, $\left\{ {2 \atop 21} \right\} = \left\{ {2 \atop 12} \right\} = \dfrac{u}{u^2+v^2}$. 其他的均爲 0 。

(b) $[11,1] = 2a^2\sinh u\cosh u$, $[22,2] = 2a^2\sin v\cos v$, $[11,2] = -2a^2\sin v\cos v$
$[22,1] = -2a^2\sinh u\cosh u$, $[12,1] = [21,1] = 2a^2\sin v\cos v$,
$[21,2] = [12,2] = 2a^2\sinh u\cosh u$

$\left\{ {1 \atop 11} \right\} = \dfrac{\sinh u\cosh u}{\sinh^2 u + \sin^2 v}$, $\left\{ {2 \atop 22} \right\} = \dfrac{\sin v\cos v}{\sinh^2 u + \sin^2 v}$, $\left\{ {1 \atop 22} \right\} = \dfrac{-\sinh u\cosh u}{\sinh^2 u + \sin^2 v}$,

$\left\{ {2 \atop 11} \right\} = \dfrac{-\sin v\cos v}{\sinh^2 u + \sin^2 v}$, $\left\{ {1 \atop 21} \right\} = \left\{ {1 \atop 12} \right\} = \dfrac{\sin v\cos v}{\sinh^2 u + \sin^2 v}$,

$\left\{ {2 \atop 21} \right\} = \left\{ {2 \atop 12} \right\} = \dfrac{\sinh u\cosh u}{\sinh^2 u + \sin^2 v}$. 其他的均爲 0 。

8.132 (a) $\dfrac{d^2\rho}{ds^2} - \rho\left(\dfrac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0$, $\dfrac{d^2\phi}{ds^2} + \dfrac{2}{\rho}\dfrac{d\rho}{ds}\dfrac{d\phi}{ds} = 0$, $\dfrac{d^2 z}{ds^2} = 0$

(b) $\dfrac{d^2 r}{ds^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{ds}\right)^2 - r\sin^2\theta\left(\dfrac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0$

$\dfrac{d^2\theta}{ds^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{dr}{ds}\dfrac{d\theta}{ds} - \sin\theta\cos\theta\left(\dfrac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0$

$\dfrac{d^2\phi}{ds^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{dr}{ds}\dfrac{d\phi}{ds} + 2\cot\theta\dfrac{d\theta}{ds}\dfrac{d\phi}{ds} = 0$

8.135 $\left\{ {1 \atop 22} \right\} = x^1$, $\left\{ {2 \atop 12} \right\} = \left\{ {2 \atop 21} \right\} = \dfrac{x^1}{(x^1)^2 - (x^2)^2}$, $\left\{ {2 \atop 22} \right\} = \dfrac{x^2}{(x^2)^2 - (x^1)^2}$. 其他的均爲 0 。

$\dfrac{d^2x^1}{ds^2} + x^1\left(\dfrac{dx^2}{ds}\right)^2 = 0$, $\dfrac{d^2x^2}{ds^2} + \dfrac{2x^1}{(x^1)^2 - (x^2)^2}\dfrac{dx^1}{ds}\dfrac{dx^2}{ds} + \dfrac{x^2}{(x^2)^2 - (x^1)^2}\left(\dfrac{dx^2}{ds}\right)^2 = 0$

8.136 (a) $A_{l,q}^{jk} = \dfrac{\partial A_l^{jk}}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop lq} \right\} A_s^{jk} + \left\{ {j \atop qs} \right\} A_l^{sk} + \left\{ {k \atop qs} \right\} A_l^{js}$

(b) $A^{jk}_{lm,q} = \frac{\partial A^{jk}_{lm}}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop lq} \right\} A^{jk}_{sm} - \left\{ {s \atop mq} \right\} A^{jk}_{ls} + \left\{ {j \atop qs} \right\} A^{sk}_{lm} + \left\{ {k \atop qs} \right\} A^{js}_{lm}$

(c) $A^{j}_{klm,q} = \frac{\partial A^{j}_{klm}}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop kq} \right\} A^{j}_{slm} - \left\{ {s \atop lq} \right\} A^{j}_{ksm} - \left\{ {s \atop mq} \right\} A^{j}_{kls} + \left\{ {j \atop qs} \right\} A^{s}_{klm}$

(d) $A^{jkl}_{m,q} = \frac{\partial A^{jkl}_{m}}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop mq} \right\} A^{jkl}_{s} + \left\{ {j \atop qs} \right\} A^{skl}_{m} + \left\{ {k \atop qs} \right\} A^{jsl}_{m} + \left\{ {l \atop qs} \right\} A^{jks}_{m}$

(e) $A^{jk}_{lmn,q} = \frac{\partial A^{jk}_{lmn}}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop lq} \right\} A^{jk}_{smn} - \left\{ {s \atop mq} \right\} A^{jk}_{lsn} - \left\{ {s \atop nq} \right\} A^{jk}_{lms} + \left\{ {j \atop qs} \right\} A^{sk}_{lmn} + \left\{ {k \atop qs} \right\} A^{js}_{lmn}$

8·137 (a) $g_{jk} A^{k}_{,q}$, (b) $A^{j}_{,q} B_k + A^{j} B_{k,q}$, (c) $\delta^{j}_{k} A_{j,q}$

8·141 (a) $\frac{1}{u^2+v^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{u^2+v^2}\,A_u) + \frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{u^2+v^2}\,A_v)\right] + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

(b) $\frac{1}{uv(u^2+v^2)}\left[\frac{\partial}{\partial u}(uv\sqrt{u^2+v^2}\,A_u) + \frac{\partial}{\partial v}(uv\sqrt{u^2+v^2}\,A_v)\right] + \frac{1}{uv}\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}$

8·142 (a) $\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\mathbf{e}_u + \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\mathbf{e}_v + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\mathbf{e}_z$

(b) $\frac{1}{a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\mathbf{e}_u + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\mathbf{e}_v\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\mathbf{e}_z$

其中 $\mathbf{e}_u$，$\mathbf{e}_v$，$\mathbf{e}_z$ 分別爲在 u，v，z 增加方向的單位向量。

8·143 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + (u^2+v^2)\Phi = 0$

8·145 (a) $\frac{\delta A_k}{\delta t} = A_{k,q}\frac{dx^q}{dt} = \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop kq} \right\} A_s\right)\frac{dx^q}{dt} = \frac{dA_k}{dt} - \left\{ {s \atop kq} \right\} A_s \frac{dx^q}{dt}$

(b) $\frac{\delta A^{jk}}{\delta t} = \frac{dA^{jk}}{dt} + \left\{ {j \atop qs} \right\} A^{sk}\frac{dx^q}{dt} + \left\{ {k \atop qs} \right\} A^{js}\frac{dx^q}{dt}$

(c) $\frac{\delta}{\delta t}(A_j B^k) = \frac{\delta A_j}{\delta t} B^k + A_j \frac{\delta B^k}{\delta t}$

$= \left(\frac{dA_j}{dt} - \left\{ {s \atop jq} \right\} A_s \frac{dx^q}{dt}\right) B^k + A_j\left(\frac{dB^k}{dt} + \left\{ {k \atop qs} \right\} B^s \frac{dx^q}{dt}\right)$

(d) $\frac{\delta}{\delta t}(\Phi A^{j}_{k}) = \Phi\frac{\delta A^{j}_{k}}{\delta t} + \frac{\delta \Phi}{\delta t} A^{j}_{k}$

$= \Phi\left(\frac{dA^{j}_{k}}{dt} + \left\{ {j \atop qs} \right\} A^{s}_{k}\frac{dx^q}{dt} - \left\{ {s \atop kq} \right\} A^{j}_{s}\frac{dx^q}{dt}\right) + \frac{d\Phi}{dt} A^{j}_{k}$

8·146 (a) $g_{jk}\dfrac{\delta A^k}{\delta t} = g_{jk}\left(\dfrac{dA^k}{dt} + \left\{ {k \atop qs} \right\} A^s \dfrac{dx^q}{dt}\right)$

(b) $\delta^j_k \dfrac{\delta A_j}{\delta t} = \delta^j_k\left(\dfrac{dA_j}{dt} - \left\{ {s \atop jq} \right\} A_s \dfrac{dx^q}{dt}\right) = \dfrac{dA_k}{dt} - \left\{ {s \atop kq} \right\} A_s \dfrac{dx^q}{dt}$

(c) $g_{jk}\,\delta^j_r \dfrac{\delta A^r_p}{\delta t} = g_{rk}\left(\dfrac{dA^r_p}{dt} - \left\{ {s \atop pq} \right\} A^r_s \dfrac{dx^q}{dt} + \left\{ {r \atop qs} \right\} A^s_p \dfrac{dx^q}{dt}\right)$

8·153 (a) $\dot r,\ r\dot\theta,\ r\sin\theta\,\dot\phi$

(b) $\ddot r - r\dot\theta^2 - r\sin^2\theta\,\dot\phi^2,\quad \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot\theta) - r\sin\theta\cos\theta\,\dot\phi^2,\quad \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\,\dot\phi)$

8·156 $\dfrac{\partial(\sigma v^q)}{\partial x^q} + \dfrac{\sigma v^q}{2g}\dfrac{\partial g}{\partial x^q} + \dfrac{\partial\sigma}{\partial t} = 0$　其中 v^q 爲此速度的逆變分量。

8·157 (a) $\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\sigma v^1) + \dfrac{\partial}{\partial\phi}(\sigma v^2) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\sigma v^3) + \dfrac{\sigma v^1}{\rho} + \dfrac{\partial\sigma}{\partial t} = 0$

(b) $\dfrac{\partial}{\partial r}(\sigma v^1) + \dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sigma v^2) + \dfrac{\partial}{\partial\phi}(\sigma v^3) + \sigma\left(\dfrac{2v^1}{r} + v^2\cot\theta\right) + \dfrac{\partial\sigma}{\partial t} = 0$

其中 v^1，v^2，v^3 爲此速度的逆變分量。

8·158 $\displaystyle\int_C A_p \frac{dx^p}{ds}\,ds = -\iint_S \epsilon^{pqr} A_{q,r}\, \nu_p\, dS$　其中 $\dfrac{dx^p}{ds}$ 爲封閉曲線 C 的單位切向量，而 ν^p 爲以 C 爲邊界之曲面 S 的正單位法向量。

索　引

A

B

C

T

U

V

W